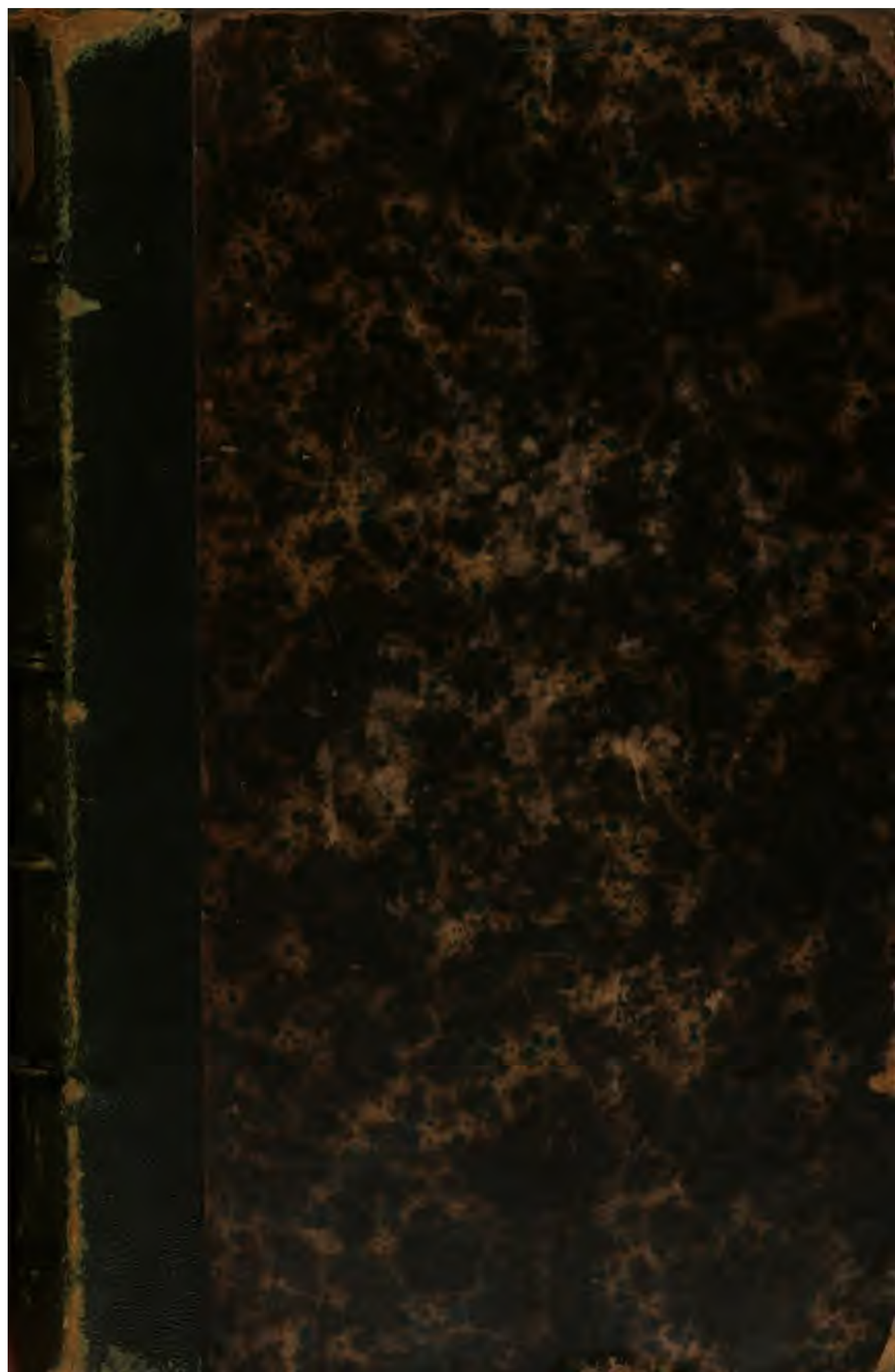
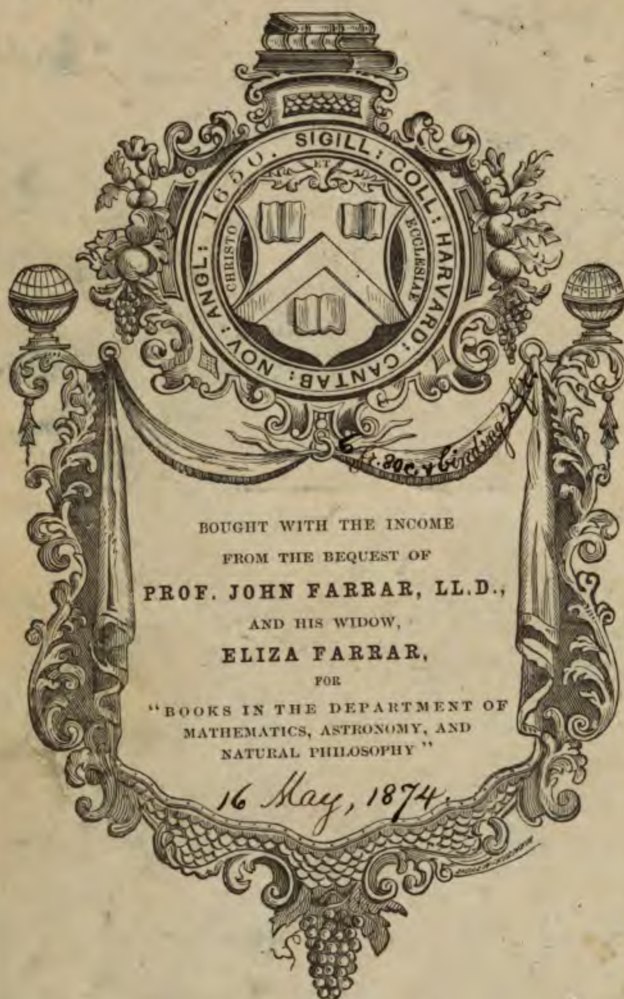
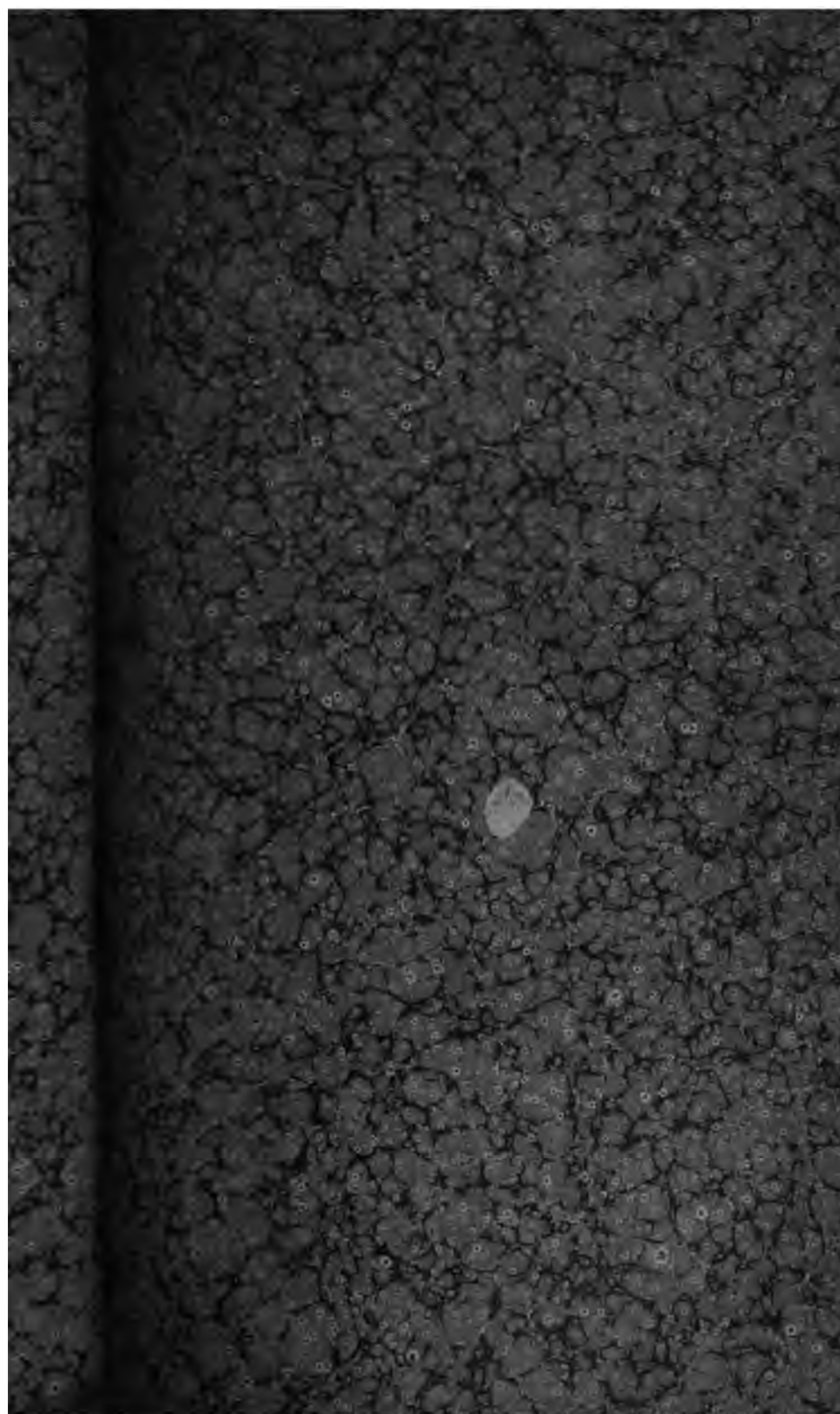



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES

COURBES PLANES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES

COURBES PLANES,

CONTENANT

LA RÉSOLUTION D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES CHOISIS,

A L'USAGE

DES CANDIDATS A LA LICENCE ÈS SCIENCES,

Louis Stanislas Xavier Barthélemy

PAR M. L'ABBÉ AOUST,

PROFESSEUR D'ANALYSE INFINITÉSIMALE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

Scientia ex uno evidenter deducta principio.
S. THOMAS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1873

18 July [illegible]
Farrar Fund.
(6 fr. 80 c. + binding 2 fr.)

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

DES COURBES RAPPORTÉES A DIVERS SYSTÈMES DE COORDONNÉES SIMPLES.

CHAPITRE PREMIER. — CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE II. — DES ÉQUATIONS NATURELLES DES COURBES.

§ I. — *Des polygones et de leurs équations.*

§ II. — *Des courbes planes et de leurs équations.*

§ II. — *Des développées obliques.*

§ III. — *Des épicycloïdes et des hypocycloïdes.*

CHAPITRE IV. — Coordonnées tangentielles. Système inverse.

§ I. — *Formules générales.*

§ II. — *Des courbes dont la tangente jouit d'une propriété donnée.*

§ III. — *Des développantes des courbes.*

§ IV. — *Des développantes obliques.*

§ V. — *Des lignes dont la courbure est donnée.*

LIVRE II.

DES COURBES RAPPORTÉES A DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES COMPLEXES.

CHAPITRE PREMIER. — DES COURBES CONJUGUÉES SUIVANT LEURS TANGENTES.

§ VI. — *Des caustiques par réfraction.*

§ VII. — *Des courbes conjuguées d'après diverses lois.*

CHAPITRE II. — DES ROULETTES.

CHAPITRE III. — DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE.

§ I. — *Principes.*

§ II. — *Applications.*

CHAPITRE IV. — Mouvement d'une figure qui se déforme.

§ I. — *Problèmes fondamentaux.*

§ II. — *Applications.*

CHAPITRE V. — DES COURBES CONJUGUÉES SUIVANT LEURS RAYONS VECTEURS.

§ I. — *Principes.*

§ II. — *Applications.*

§ III. — *Généralisation.*

LIVRE III.

DES COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES QUELCONQUES.

CHAPITRE PREMIER. — DES COORDONNÉES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE II. — Relations entre les variations des courbures.

CHAPITRE III. — Des paramètres différentiels.

CHAPITRE IV. — D'une courbe quelconque rapportée à des coordonnées curvilignes.

CHAPITRE V. — Applications des théories précédentes.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

I. L'accueil favorable que les géomètres ont fait à l'*Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, que nous avons dernièrement publiée, nous détermine à publier sans retard l'*Analyse infinitésimale des courbes planes*. Ces deux Livres ont des relations tellement directes l'un avec l'autre, qu'ils sont en quelque sorte inséparables. C'est dans le même esprit qu'ils ont été écrits, c'est la même doctrine qu'ils contiennent; nous pourrions dire qu'ils forment un seul et même Livre, s'ils n'étaient indépendants l'un de l'autre par la méthode et par la démonstration.

Cette diversité de procédés, cette indépendance de raisonnement nous étaient imposées par de puissantes raisons.

Au point de vue de la logique, il faut qu'une doctrine se développe dans l'ordre naturel; l'ordre naturel du premier Livre, abordant d'emblée le problème général des courbes tracées sur une surface quelconque, consistait à descendre du composé au simple; l'ordre naturel du second Livre, destiné à donner la solution du problème des courbes planes, consiste au contraire à s'élever graduellement du simple au composé.

Au point de vue des idées, une doctrine affirme sa puissance lorsque, par ses considérations diverses, elle se montre toujours la même.

Au point de vue des formes, elle devient attrayante lorsqu'elle pare son unité par la variété des méthodes.

II. La doctrine développée dans notre *Analyse des courbes tracées sur une surface* est fondée sur deux principes qui, rigoureusement, n'en forment qu'un. Le premier est que, lorsqu'une ligne est décrite sur une surface, il faut dans l'étude de cette ligne exclure tout élément étranger à la surface. Il est en effet inutile, lorsqu'on chemine sur une surface, d'aller chercher ailleurs des jalons pour connaître le chemin qui a été parcouru. Or, lorsque l'on rapporte un point de la surface à des coordonnées qui ne lui appartiennent pas, seraient-elles les plus simples de toutes, telles que les coordonnées rectilignes, que fait-on autre chose qu'établir des points de comparaison en dehors de la surface elle-même? Rien n'est plus illogique que ce procédé; mais, en prenant des points de repère sur des surfaces différentes de celle dont il s'agit, il se produit un double inconvénient : le premier est que ces points de repère ne s'introduisent pas seuls, ils entraînent des éléments qui appartiennent à ces surfaces, ces éléments parasites alourdissent la marche du calcul; le second est qu'ils masquent par leur présence les éléments qu'on a le plus d'intérêt à manier, ceux qui appartiennent à la surface elle-même. De ces considérations, il résulte que c'est sur la surface elle-même qu'il faut prendre les coordonnées auxquelles la courbe que l'on étudie doit être rapportée.

Il est vrai qu'il n'est pas facile de rapporter une ligne tracée sur une surface à d'autres lignes également tracées sur la surface; mais, parmi ces courbes, il en est qui présentent des caractères exceptionnels de simplicité, qui jouent sur la surface le même rôle que la ligne droite remplit sur le plan. Ces lignes, qu'on appelle *géodésiques*, se présentent d'elles-mêmes pour remplir les fonctions de lignes coordonnées, par suite de deux propriétés spéciales, qui sont : la première, une propriété projective à l'instar de celle dont jouissent les contours rectilignes; la seconde, une propriété angulaire, analogue à celle qui appartient à la somme des angles des polygones formés par des droites. Nous avons montré surabondamment dans notre premier Ouvrage le parti que l'on peut tirer de ce système de coordonnées; nous avons montré aussi que l'on pouvait quelquefois se servir dans le même but des lignes de

courbure et de quelques autres lignes possédant des avantages spéciaux, suivant la nature de la surface.

III. Le second principe sur lequel est fondée notre analyse des lignes décrites sur une surface quelconque est que, pour l'étude des lignes, il convient d'exclure tout élément étranger à ces lignes; mais ici se présente une difficulté provenant de l'option qu'il y a à faire entre deux partis qui présentent chacun un avantage réel.

Lorsqu'on ne fait intervenir dans la représentation d'une ligne par des équations aucun élément étranger à cette ligne, deux équations simples suffisent : la première donnant le rapport de l'élément curviligne de la courbe à la déviation qu'éprouve cet élément lorsqu'on passe d'un point à un point infiniment voisin; et la seconde donnant le rapport du même élément curviligne à la déviation du plan qui contient deux éléments curvilignes consécutifs, lorsqu'on passe d'un point à un point infiniment voisin. Ces deux équations, dans lesquelles les seconds membres sont des fonctions, soit de l'arc, soit de la déviation intégrale, définissent complétement la courbe en elle-même, et ne renferment aucun élément étranger à cette courbe. Ce sont les deux équations élémentaires de la courbe; mais il arrive alors que la surface qui la contient se trouve complétement éliminée : ce qui revient à renoncer, par cela même, aux avantages qu'elle peut introduire, et qu'elle introduit réellement, pour la simplification du calcul, lorsqu'on lui fait jouer un rôle direct.

On est donc conduit à faire intervenir directement la surface dans le calcul; dans ce cas, une seule équation suffit pour représenter la courbe. On aurait intérêt à conserver sans altération l'une de ses deux équations élémentaires, pour n'introduire aucun élément étranger à la courbe; mais la chose n'est pas possible. Il faut que la présence de la surface s'accuse par une légère modification qui pénètre dans la première de ces deux équations, sans toutefois en oblitérer la forme. Il suffit de prendre pour équation le rapport de l'élément de la ligne à la projection sur le plan tangent, de la déviation qu'éprouve cet élément quand on passe à un point infiniment voisin pris

données de la définition se trouvent masquées, et l'on arrive à ce résultat anormal que la tangente et le cercle osculateur sont déterminés par des éléments différents de ceux qu'il convenait d'introduire, et que ces belles relations qui existent entre les éléments d'une courbe et les éléments correspondants des lignes coordonnées appartenant à la définition de la courbe, relations qu'on avait tant d'intérêt à connaître, nous devrions dire qu'il était indispensable de connaître, sont précisément celles qui sont le plus cachées par suite de l'emploi inopportun d'un système de coordonnées différent de celui qu'il fallait choisir.

Ces considérations prennent une nouvelle force lorsqu'on les applique à la rectification et à la quadrature de la courbe, lesquelles sont toujours simplifiées lorsqu'on les fait dépendre de la rectification et de la quadrature des lignes coordonnées dévoilées par la définition de la courbe.

VI. Ces raisonnements seront mis dans une plus grande évidence par quelques exemples. Lorsque l'on définit l'ellipse par cette propriété que la somme des distances d'un de ses points à deux points fixes est constante, fait-on autre chose sinon qu'exprimer une relation entre un de ses points et une certaine longueur constante; on affirme que tout point de la courbe est l'intersection de deux cercles dont les centres sont deux points fixes, et dont la somme des rayons égale la longueur constante donnée. Le système des lignes coordonnées sera le système de deux cercles ayant leurs centres en des points donnés, et dont les intersections peuvent prendre toutes les positions possibles dans le plan, par suite de la variation des deux rayons. Les deux rayons variables ou paramètres sont les coordonnées du système. Comme le système de coordonnées bicirculaires à centres fixes et à rayons variables correspond à la définition précédente de l'ellipse, c'est aussi celui qu'il faut adopter dans le cas actuel.

Celui qui, restant fidèle à la définition précédente de l'ellipse, voudrait vérifier si un des points de cette courbe, supposée tracée, lui appartient réellement, celui-là serait forcé de construire deux cercles du système bicirculaire pour

montrer que ce point est leur intersection; comme aussi, si, après avoir trouvé l'équation de l'ellipse dans le système rectiligne, il voulait la vérifier d'après la définition, il serait obligé de mettre en évidence les équations des deux cercles pour montrer qu'elles ont une solution commune avec l'équation de l'ellipse. Or cette vérification intuitive dans le cas du système bicirculaire n'est point évidente dans l'équation cartésienne de l'ellipse, dépouillée de radicaux; et si l'on persiste à se servir de cette équation, sans faire cette vérification, on détermine les points de la courbe par des conditions différentes de celles de la définition.

Passons maintenant à la tangente et au rayon de courbure de l'ellipse. Une première différentiation de l'équation de la courbe, écrite dans le système bicirculaire, apprend que la *normale* à l'ellipse est bissectrice de l'angle *des normales* des cercles coordonnées; et une seconde différentiation apprend que le *rayon de courbure* de l'ellipse et les segments interceptés sur ce rayon par les perpendiculaires menées des deux centres des cercles coordonnées aux *rayons* correspondants satisfont à la division harmonique. Or, lorsque l'on différentie une première et une seconde fois l'équation rationnelle de l'ellipse écrite en coordonnées rectilignes, d'après la même définition, on arrive très-certainement à déterminer la tangente et le rayon de courbure de cette courbe, mais c'est au moyen d'éléments différents, étrangers à la définition, et les deux belles relations qui existent, la première entre les normales de l'ellipse et des deux cercles coordonnés, la seconde entre les rayons de courbure de ces trois lignes, se trouvent plus ou moins obscurcies, de sorte que les avantages que l'on retire de l'emploi des coordonnées rectilignes, et qui sont principalement relatifs au nombre d'intersections de la courbe avec une droite, sont loin de compenser les avantages qui appartiennent aux coordonnées de la définition. En effet, ces coordonnées font connaître tout ce qui intéresse non seulement la conique définie, mais encore la série des coniques homofocales que l'on obtient par la variation de la constante qui représente la somme des deux rayons, parce que les équations différentielles que l'on obtient, ne renfer-

mant plus cette constante, évanouie par l'acte même de la différentiation, appartiennent à l'une quelconque des équations de la série de ces coniques.

VII. Supposons maintenant que l'ellipse que nous venons de considérer eût été définie par cette condition que la distance d'un de ses points à un point fixe est dans un rapport constant avec la distance de ce point à une droite donnée. Dans le cas actuel, le système de coordonnées conforme à la définition de la courbe est d'une part une série de cercles dont le centre commun est le point fixe, et de l'autre une série de droites parallèles à la droite donnée. La différentiation de l'équation de la courbe dans ce système de coordonnées conduit à la propriété de la tangente corrélative à la nouvelle définition de la courbe, savoir, que la tangente en un de ces points, la polaire de ce point par rapport au point fixe, considéré comme un cercle d'un rayon infiniment petit, et la droite fixe, sont concourantes en un point. Cette nouvelle propriété de la tangente fait connaître la construction de cette droite, non moins élégante que celle qui a été précédemment trouvée, et elle s'applique d'ailleurs au cas où le point fixe serait remplacé par un cercle doublement tangent à l'ellipse, et la droite donnée, par la corde des contacts.

Une seconde différentiation de l'équation de la courbe conduit à une équation binôme qui exprime que, si du point fixe on mène une normale commune à l'ellipse et à la droite donnée, elle intercepte sur la normale à l'ellipse au point considéré un segment qui est lié avec le rayon de courbure, par cette condition que si l'on projette ce rayon de courbure sur la normale au cercle, et cette projection sur la normale à l'ellipse, on obtient le segment dont il est question. La construction du rayon de courbure qui résulte de cette belle propriété est digne d'être remarquée.

Ces deux propriétés, qui se mettent d'elles-mêmes en évidence lorsque l'on se sert des coordonnées indiquées par la définition de la courbe, sont cachées lorsque l'équation de la courbe, définie comme nous venons de le faire, est exprimée en coordonnées rectilignes. Aussi, bien que plusieurs auteurs

aient considéré les coniques d'après la définition précédente qui nous a été léguée par l'antiquité, ils ne sont pas arrivés aux deux règles si simples que nous venons de donner, non par l'impuissance de leur talent, mais par celle de la méthode.

VIII. Remarquons encore ici que ces deux propriétés appartiennent à toutes les coniques de la série obtenue en donnant toutes les valeurs possibles au paramètre constant qui exprime le rapport des distances d'un point de la courbe au point fixe et à la directrice, par suite de l'élimination qui a été faite de ce paramètre par la différentiation. On arriverait même par là à de nombreux théorèmes qu'il n'entre pas dans notre but de développer ici, nous contentant de citer les deux suivants, d'une haute généralité :

1° Si une série de coniques ont un foyer commun et une directrice commune, tout point du plan de ces courbes sera tel, que si l'on prend les polaires de ce point par rapport à toutes les courbes de la série, ces polaires seront convergentes;

2° Si du même point on mène des perpendiculaires à ces différentes polaires et qu'on prenne sur ces perpendiculaires, à partir du point des troisièmes proportionnelles d'une part aux diamètres parallèles aux polaires, et de l'autre aux distances de ces polaires aux centres correspondants, les extrémités de ces troisièmes proportionnelles seront en ligne droite; celle qui correspond à la conique qui passe par ce point n'est autre chose que le rayon de courbure de cette conique. On a donc une nouvelle construction du rayon de courbure de la conique.

Ces deux propriétés font connaître la tangente et le rayon de courbure de toutes ces coniques.

Il est inutile d'insister sur l'application de cette doctrine à de nouveaux exemples, cette application étant ordinairement facile et toujours infaillible.

IX. Il convient de voir si le second principe de l'Analyse des courbes, d'après lequel on n'introduit dans cette analyse

aucun élément étranger à la courbe, principe qui n'a dû subir qu'une légère restriction pour convenir à la théorie des courbes tracées sur une surface, convient d'une manière complète et absolue à l'Analyse des courbes planes. Si l'on remarque que la courbure de la surface devient nulle lorsqu'il s'agit d'un plan et que la déviation géodésique d'un élément de courbe, par rapport à l'élément qui le précède, se confond avec la déviation proprement dite lorsqu'il s'agit d'une courbe plane, on voit que l'équation de la surface disparaît et que l'équation qui donne le rapport de l'arc élémentaire à la déviation élémentaire en fonction de la déviation intégrale subsiste, et qu'elle suffit pour caractériser la courbe. Ainsi le second principe de l'Analyse des courbes tracées sur une surface s'applique sans restriction aux courbes planes, l'Analyse générale ne se trouve pas modifiée ; son caractère d'unité et de simplicité ne reçoit donc aucune atteinte.

L'équation qui donne le rapport différentiel de l'arc à la déviation en fonction de la déviation totale, outre qu'elle ne renferme aucun élément étranger à la courbe, contient tous ses éléments naturels ; car, si on la considère comme un polygone infinitésimal, ce polygone n'a que deux sortes d'éléments, ses côtés et ses angles, et il est complétement déterminé dès que l'on connaît la loi du rapport d'un côté quelconque à l'angle qu'il forme avec le côté contigu ; de là résulte que l'expression du rapport différentiel de l'arc à la déviation détermine complétement la courbe. C'est pour cela que nous l'appelons *équation élémentaire*, *équation naturelle* de la courbe ; comme aussi nous appelons *coordonnées naturelles*, *coordonnées élémentaires* de la courbe, l'arc et la déviation.

X. Euler a le premier fait usage d'un système de coordonnées analogue au précédent. Ce système se composait des rayons de courbure et des angles qu'ils forment avec une ligne fixe ; mais il l'employait non pour étudier la courbe elle-même, mais afin de déterminer plus facilement, dans les problèmes d'une certaine nature, les coordonnées cartésiennes du point de cette courbe, lesquelles s'expriment alors tantôt en fonction de l'arc, tantôt en fonction de la déviation. Nous

ne contestons pas le puissant parti que l'on peut tirer des coordonnées élémentaires d'une courbe pour trouver ses coordonnées rectilignes; on peut même généraliser la solution de cette question, comme le lecteur verra que nous l'avons fait dans le courant de cet Ouvrage; mais ce genre de coordonnées nous paraît avoir son véritable rôle lorsque l'on veut étudier toutes les affections de la courbe d'après son équation naturelle; aussi est-il entièrement dans notre but de montrer les avantages de cette équation.

D'abord, comme nous venons de le montrer, elle détermine complétement la courbe; elle fait aussi connaître d'une manière facile les différentes grandeurs intimement liées avec la courbe elle-même. La tangente en un point est donnée par la déviation intégrale, laquelle n'est autre chose, dans le cas des courbes planes, que l'angle de l'élément que l'on considère avec l'élément initial. Le rayon de courbure est donné par le rapport différentiel de l'arc à la déviation; la longueur de l'arc par l'intégrale de l'expression de ce rapport multiplié par la déviation; le double de l'aire que balaye le rayon de courbure par l'intégrale du carré de ce rapport multiplié par la déviation; l'angle de contingence de la courbe n'est pas distinct de la déviation élémentaire elle-même; les segments interceptés sur la tangente et la normale par une ligne déterminée s'expriment non moins simplement en fonction de ce rapport, de sorte que tout ce qui intéresse la construction de la courbe dépend d'une fonction simple de ce rapport.

Nous avons déjà montré, dans notre premier Livre, avec quelle facilité l'équation élémentaire de la courbe décide la question, si difficile dans toute autre analyse, de l'identité de deux courbes, et qu'elle donne un critérium infaillible; comment elle résout le problème de la classification des lignes par la variation des constantes qui entrent dans l'expression du rapport différentiel de l'arc à la déviation; comment elle dévoile, entre des courbes en apparence très-éloignées, des affinités intimes qui ne dépendent nullement du degré de l'équation cartésienne de ces courbes, puisque ces affinités existent même dans le cas où l'une de ces courbes est algébrique, et l'autre transcendante; comment enfin elle donne des

règles rationnelles pour établir en quelque sorte les différents degrés de parenté des lignes; il est donc inutile d'insister sur ces avantages.

XI. Il convient pourtant de montrer, par quelques exemples, par quelle voie facile l'équation naturelle de la courbe conduit à la connaissance d'autres courbes qui dérivent de la première, parce que dans la Géométrie tout se tient, tout s'enchaîne pour ne former qu'un seul tout.

Deux courbes, dont les rapports différentiels de l'arc à la déviation sont en raison constante, jouissent du caractère complet de similitude.

Deux courbes pour lesquelles ces rapports sont représentés par deux fonctions, dérivées l'une de l'autre par différentiation, sont l'une la développante, l'autre la développée.

Les courbes parallèles correspondent à des expressions de ce rapport différentiel qui ne diffèrent que par une constante.

S'il s'agit de la développée oblique d'une courbe, c'est-à-dire de la ligne dont les tangentes coupent sous un angle constant une courbe donnée, le rapport différentiel de la première est une fonction linéaire des rapports élémentaires de la seconde et de sa développée.

S'il s'agit de la développée oblique seconde d'une courbe, c'est-à-dire d'une courbe coupant sous un angle constant la développée oblique première d'une courbe donnée, le rapport élémentaire de l'arc à la déviation de cette développée oblique seconde est une fonction linéaire des rapports élémentaires de la courbe donnée, de sa développée première et de sa développée seconde.

Généralement, pour une développée oblique de l'ordre n d'une courbe donnée, le rapport élémentaire de l'arc à la déviation est une fonction linéaire des rapports élémentaires de la courbe donnée et de ses $n-1$ développées.

Les courbes du genre épicycloïdal, qui forment une classe aussi nombreuse que variée, sont pourtant représentées par une équation élémentaire unique, dans laquelle le rapport de l'arc à la déviation est proportionnel au cosinus d'un angle qui est à la déviation intégrale de la courbe en raison inverse

des rapports élémentaires de la courbe directrice et de sa parallèle. C'est par suite des valeurs entières ou fractionnaires que présente ce rapport que les courbes épicycloïdales sont tantôt algébriques, tantôt transcendantes. Lorsque, la courbe roulante étant toujours un cercle, la courbe directrice est une courbe quelconque, la loi de l'équation élémentaire ne se trouve pas altérée dans sa forme géométrique, bien qu'elle le soit dans sa forme algébrique, parce que certains coefficients, constants dans le premier cas, cessent de l'être dans le second.

Les roulettes, qui, depuis Pascal, ont été l'objet de recherches si étendues et si approfondies, ont une équation naturelle remarquable en ce qu'elle exprime que les rapports élémentaires qui caractérisent la courbe directrice située dans le plan fixe, la courbe roulante située dans le plan mobile et celle qui est l'enveloppe de cette dernière dans le plan fixe, satisfont à la relation harmonique.

Les courbes qui sont l'enveloppe d'un rayon lumineux réfléchi ou réfracté, et qu'on appelle caustiques par réflexion ou réfraction, présentent, quand on les exprime par leur équation naturelle, des lois non moins simples, même lorsqu'on généralise ce problème et qu'on suppose que chaque rayon lumineux est lancé normalement à l'élément correspondant d'une certaine courbe.

Nous pourrions multiplier les exemples, mais ce que nous venons de dire suffit pour montrer la fécondité de notre analyse et surtout son utilité, qui apparaît principalement en ce que cette analyse dévoile les liens qui unissent les lignes les plus dissemblables, et qu'elle fait converger vers l'unité les diverses lois qui régissent la Géométrie des courbes. Cette Géométrie se montre alors comme un seul et majestueux édifice où tout est ordonné suivant les règles d'une architecture sublime.

XII. Et ce qu'il y a de singulier dans cette manière de traiter des courbes, c'est que ce ne sont pas seulement les relations directes qui existent entre elles qui sont rendues apparentes, mais encore les relations les plus cachées, celles

que l'œil le plus exercé serait difficilement parvenu à découvrir. Ainsi, lorsque l'on développe une courbe sur une ligne droite, et qu'on établit entre chaque élément linéaire de la courbe et le rayon de courbure correspondant cette solidarité d'après laquelle le rayon de courbure ne cesse pas d'être normal à l'élément linéaire correspondant, les centres de courbure sont distribués après le développement de la courbe, sur une certaine ligne, l'Analyse fondée sur les équations naturelles des courbes enseigne tout d'abord à traiter intuitivement cette question complexe ; elle dit que le second membre de l'équation naturelle donne l'ordonnée de la courbe cherchée dans le système cartésien, puisque ce second membre n'est autre chose que l'expression du rayon de courbure; elle dit aussi que l'intégrale de ce second membre, multiplié par la déviation, donne l'abscisse de la même courbe dans le même système cartésien; voilà donc la solution analytique du problème; mais la même Analyse manifeste aussi la nature intime de cette courbe au point de vue cinématique. En effet, elle montre que, lorsque le mouvement du plan mobile qui contient une droite est réglé d'après cette condition que l'extrémité de cette droite s'appuie sur une droite située dans le plan fixe, tout en restant tangente à une courbe quelconque aussi située dans le plan fixe, la nature de ce mouvement est un roulement sur une courbe directrice, laquelle n'est autre chose que le lieu des centres de courbure de la courbe située dans le plan fixe après la déformation de cette courbe, d'après les conditions géométriques que nous avons précédemment indiquées.

On trouverait de la même manière le moyen d'obtenir la solution du problème plus compliqué, consistant à trouver le lieu des centres de courbure d'une courbe donnée après le développement de la première sur la seconde, d'après les conditions déjà établies, et de prouver l'identité de la courbe trouvée avec une courbe obtenue par un problème de Cinématique sur le roulement d'un plan analogue au précédent. Notre Analyse traite le même problème à un point de vue encore plus général, comme nous le ferons voir dans le courant de notre Livre.

XIII. Résumons les avantages principaux de cette Analyse des courbes.

Elle est une dans son principe, dont la traduction analytique donne l'équation élémentaire de la courbe.

Elle est simple par sa méthode, qui rejette tout auxiliaire étranger à la nature de la courbe.

Elle est générale, également applicable aux courbes planes et aux courbes tracées sur une surface quelconque.

Elle est directe, parce qu'elle établit logiquement les propriétés les plus intimes de la courbe, les faisant toutes dériver sans effort de l'équation naturelle.

Enfin, et ce n'est pas son moindre avantage, elle est géométrique, non-seulemen ten ce sens qu'elle donne toute la Géométrie de la courbe, mais parce qu'elle apprend quelles sont sa position, son importance, ses affinités dans la Géométrie universelle des courbes.

Une Analyse qui se présente revêtue de tous ces caractères est certainement la vraie, dans le sens le plus large; elle ne demande qu'à attirer à elle les géomètres, à être développée et perfectionnée par les hommes d'un talent supérieur. Si la Géométrie est une mine d'une étendue sans limites, d'une richesse inépuisable, l'Analyse que nous signalons sera entre leurs mains un précieux instrument d'exploitation.

XIV. L'Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque est redevable de nombreux perfectionnements au principe géométrique que nous avons proposé sous le nom de *principe de la courbure inclinée*. Dans l'Analyse des courbes planes, le même principe se prête avec non moins de facilité aux recherches les plus délicates et devient un outil, qu'on nous pardonne cette expression, aussi sûr que maniable pour la démonstration ou la découverte. Il y a pourtant une différence entre ces deux cas, consistant en ce que le principe de la courbure inclinée donne naissance à deux équations dans le premier cas, tandis que dans le second il se traduit par une seule équation.

Considérons un angle situé dans le plan de la courbe, et admettons que par l'effet du déplacement du sommet de cet

angle, sur la courbe et dans son plan, les deux côtés viennent à varier de direction, il est évident que la variation de l'angle sera égale à la somme des déviations de chacun des côtés par rapport à la direction primitive. Nous appelons courbures inclinées de la courbe, par rapport à chacun des deux côtés, le quotient de chaque déviation par le déplacement du sommet; les directions de ces deux courbures sont données par les arcs de cercle infiniment petits qui mesurent ces déviations, de sorte que le principe en question s'énonce ainsi : le quotient de la variation de l'angle par le déplacement du sommet est égale à la somme des courbures inclinées de la courbe décrite par le sommet, par rapport à chaque côté de l'angle.

Il résulte de là que, lorsque l'un des côtés reste tangent à la courbe, l'une des deux courbures inclinées devient la courbure propre de la courbe, et que si les deux côtés restent tangents, l'un à la même courbe et l'autre à une série de courbes de même famille coupant la première, comme cela se présente dans tout système de coordonnées curvilignes, la première est la courbure propre de la courbe, et la seconde est la courbure inclinée par rapport aux tangentes des courbes de l'autre série.

Ce principe, qui est d'une grande simplicité, est une source inépuisable de conséquences utiles. Cela n'a rien de surprenant; les principes les plus féconds sont aussi les plus simples. Ce qu'il y a de difficile, c'est moins de les trouver que de les reconnaître, c'est moins d'en donner la formule que d'en démontrer la richesse; établir leur liaison avec les propositions géométriques les plus nombreuses, les plus variées, n'est-ce pas ce qui constitue l'invention proprement dite? Qu'importe de découvrir un diamant, si on le confond avec une pierre ordinaire!

XV. Ce que nous venons de dire suffit pour justifier l'unité de doctrine de l'Analyse des courbes tracées sur une surface et de l'Analyse des courbes planes. Quant à son efficacité, elle apparaît dans l'un et l'autre cas, avec le même degré d'évidence; si la première Analyse aborde des problèmes d'une

plus grande difficulté, par suite de la combinaison des éléments de la courbe avec ceux de la surface, la seconde a l'avantage de pousser jusqu'à des limites plus reculées la solution de questions relativement plus simples.

En ce qui concerne les différences de ces deux Analyses, elles consistent, comme nous l'avons déjà indiqué, dans le mode d'exposition et la marche de la démonstration. Dans le premier cas, le mode d'exposition et la marche de la démonstration sont purement analytiques, et sont fondés sur une déduction aisée et rigoureuse ; c'est le développement d'une série de conséquences d'un seul et même principe. Dans le second cas, ce mode, cette marche, sont synthétiques; on s'élève successivement du simple au composé, et l'on atteint les cas les plus complexes de la Géométrie des courbes planes; on atteindrait même, sans grandes difficultés, les principes relatifs à la Géométrie des courbes tracées sur une surface. L'application que nous avons faite de ces deux méthodes, inverses l'une de l'autre, ne sera donc pas sans utilité pour le lecteur.

XVI. Notre nouvel Ouvrage est divisé en trois Livres : le premier relatif aux questions qui peuvent être traitées par les systèmes simples de coordonnées curvilignes, le second relatif aux questions qui dépendent de systèmes de coordonnées composées, le troisième enfin ayant trait au système le plus général de coordonnées curvilignes.

Quels sont les systèmes simples qui se présentent les premiers dans l'étude des courbes? C'est, en premier lieu, le système de coordonnées naturelles dont nous avons déjà parlé. C'est, secondement, le système tangentiel très-voisin du précédent, et qui consiste à regarder la courbe que l'on étudie comme l'enveloppe d'une droite coupant une courbe donnée sous un angle dont la loi est aussi donnée. Les coordonnées sont donc : l'une curviligne, et l'autre angulaire. La première est la longueur d'un arc de courbe donnée, compté à partir d'un point fixe pris sur cette courbe jusqu'au point où elle est coupée par la droite mobile; la seconde est l'angle que cette droite fait avec la tangente en ce point à la courbe donnée.

Le troisième système de coordonnées est inverse du précédent; il consiste à regarder une courbe comme décrite par un point d'une droite qui enveloppe une courbe donnée, la distance du point au point de contact variant d'après une loi donnée. Dans ce système, les coordonnées sont, d'une part, l'arc compté sur la courbe donnée entre un point fixe et le point de contact, d'une autre part, la portion de tangente comprise entre ce dernier point et le point décrivant; la première coordonnée peut être remplacée par la déviation de la droite mobile, à partir d'une position initiale.

Nous avons déjà indiqué les nombreux avantages du premier système de coordonnées; chacun de ces deux derniers systèmes offre les avantages suivants : le premier est que le passage de l'un de ces systèmes au système naturel est facile; le second est que, en faisant usage du principe des courbures inclinées, on exprime facilement tous les éléments de la courbe que l'on étudie, tels que : normale, rayon de courbure, longueur de l'arc, aire balayée par toute droite liée avec un point de la courbe; le troisième, enfin, est que ces deux systèmes peuvent être généralisés et deviennent applicables aux courbes tracées sur une surface quelconque.

XVII. Dans le second Livre, nous étudions les courbes d'après des systèmes de coordonnées complexes. Ils sont de deux sortes, suivant qu'ils se rapportent à l'un ou à l'autre des deux derniers systèmes de coordonnées simples du Livre précédent.

En effet, ou bien on se donne une courbe directrice et *n* courbes rapportées, chacun a la courbe directrice d'après le premier système tangentiel, et il s'agit de trouver les lois d'après lesquelles ces *n* courbes sont conjuguées entre elles, lois qui régissent leurs tangentes, leurs rayons de courbure, leurs arcs ou leurs aires; ou bien, réciproquement, on se donne la courbe enveloppe d'une droite et les *n* courbes décrites par *n* points de cette droite, et il s'agit de déterminer les lois d'après lesquelles ces *n* courbes sont conjuguées entre elles, lois relatives à leurs rayons vecteurs, leurs tangentes, leurs rayons de courbure, aux arcs et aux aires qui se corres-

pondent. Ces deux systèmes complexes offrent les mêmes avantages des systèmes simples correspondants, car ils conduisent par la voie la plus directe au système naturel, ils donnent lieu à des formules aussi simples que significatives, enfin ils sont applicables aux surfaces quelconques.

C'est grâce à ces systèmes de coordonnées complexes que nous soumettons à l'Analyse un grand nombre de problèmes non résolus, parce que l'Analyse cartésienne peut difficilement les atteindre, et que nous obtenons des solutions nouvelles et complètes de problèmes déjà connus ou partiellement traités. Tels sont les problèmes généraux des roulettes, des caustiques, du mouvement d'une figure invariable ou variant par voie de déformation, et la question non moins importante de la transformation des figures par leurs rayons vecteurs, suivant une loi donnée.

Si nous avons longuement insisté sur les applications de notre Analyse, c'est qu'il nous fallait par des exemples irrécusables mettre en contraste la méthode que nous suivons avec celles que l'on a suivies jusqu'à présent et que ces applications forment en elles-mêmes, quant à la matière et quant à l'ordre, un corps de doctrine géométrique qu'il est aujourd'hui indispensable de connaître.

XVIII. Le troisième et dernier Livre est consacré à l'étude des coordonnées curvilignes planes quelconques et à l'étude générale des courbes rapportées à ces coordonnées. Nous avions déjà publié en 1859, dans le *Journal de Mathématiques de Crelle*, une théorie analytique complète de ces coordonnées; mais cette théorie ne pouvait trouver place dans le volume que nous publions, dont la marche est toute synthétique. Il nous fallait trouver dans les deux premiers Livres tous les éléments d'une théorie nouvelle; or la chose ne présente aucune difficulté, notre principe de la courbure inclinée nous donnant la solution complète de ce problème et nous permettant de nous élever d'une manière sûre jusqu'aux formules les plus générales. Il est vrai que la fidélité à la marche nouvelle donne un caractère tout à fait géométrique à cette théorie. Nous ne croyons pas que les géomètres aient à s'en

plaindre, car cette théorie leur présentera un cas nouveau où la Géométrie triomphe des plus grands obstacles par les plus petits moyens, suivant cet aphorisme si connu : *Quod tam paucis tam multa præstat, Geometria gloriatur*, et ce qu'ils verront avec intérêt, c'est que le même principe de la courbure inclinée leur permettrait d'établir par une voie tout à fait pareille la théorie complète des coordonnées curvilignes tracées sur une surface quelconque.

En effet, dans l'un et l'autre cas, deux équations fondamentales dominent la question : la première, relative à la différence des variations des angles de contingence géodésique des courbes coordonnées ; la seconde, relative à la somme des variations de ces angles. La première équation reste identiquement la même dans les deux cas, la seconde s'accroît d'un terme lorsque l'on passe du premier cas au second, parce que la courbure de la surface s'introduit lorsqu'il s'agit d'une surface quelconque ; mais dans les deux théories elles peuvent s'établir de la même manière, en partant du principe de la courbure inclinée. Ces deux équations étant établies, on peut suivre des routes tout à fait parallèles sur lesquelles se trouvent distribuées les mêmes étapes, et atteindre de la même manière les conséquences les plus éloignées qui ont dans les deux cas des formes pareilles.

Il était de notre devoir de signaler ce lien entre l'Analyse des courbes planes et celle des courbes tracées sur une surface ; car, s'il est évident que la seconde contient implicitement la première et que les formules que donne celle-là s'appliquent à celle-ci, pourvu que l'on y suppose la courbure nulle, le passage de la première à la seconde n'a pas le même degré d'évidence ; mais la possibilité et la facilité de ce passage sont également mis en relief par la méthode que nous avons suivie.

XIX. Voici maintenant l'ordre des matières traitées dans le troisième Livre du présent Ouvrage :

Le Chapitre I[er] a pour objet la courbure inclinée, ses composantes et leurs diverses expressions en fonction des lignes coordonnées, et réciproquement.

Le Chapitre II est consacré à établir les liaisons fondamentales existant entre ces courbures composantes et les angles de contingence correspondants. Ces relations ont déjà attiré l'attention des géomètres à cause de leur simplicité (*).

Le Chapitre III est l'exposition méthodique des propriétés des paramètres différentiels de premier ordre, et du rôle qui leur appartient dans la théorie des courbes.

Le Chapitre IV est relatif à l'étude d'une courbe quelconque au moyen d'un système quelconque de coordonnées curvilignes. Une marche rapide permet d'établir les relations qui existent entre les déplacements effectués sur la courbe et les déplacements correspondants des lignes coordonnées. Ces relations donnent naissance à des théorèmes sur les tangentes, les courbures, les aires, les arcs de la courbe étudiée, et les éléments analogues des lignes coordonnées. Ces théorèmes occupent une place importante dans la Géométrie des courbes.

Enfin le Chapitre V est consacré aux applications des théories précédentes à quelques exemples choisis, propres à familiariser le lecteur avec le maniement des formules de la nouvelle Analyse.

XX. Dans la voie difficile que nous avions à parcourir, nous avons été guidés par l'exemple des grands géomètres, créateurs ou propagateurs du Calcul infinitésimal, Newton et les Bernoulli, dont les premiers et les plus heureux efforts eurent pour objet l'Analyse des courbes. Mais nous devons un tribut d'éloges exceptionnel à l'Analyse de l'infini du mar-

---

(*) On nous pardonnera d'extraire du Rapport fait par M. Puiseux sur notre *Analyse des courbes tracées sur une surface quelconque* les lignes suivantes :

« Les géomètres connaissent les beaux travaux de M. l'abbé Aoust sur les surfaces et les courbes qu'on y peut tracer. On lui doit en particulier d'avoir introduit sous le nom de *courbure inclinée* un élément qui donne un grand nombre de théorèmes nouveaux ou qui permet de généraliser des propositions déjà connues. L'Ouvrage de M. l'abbé Aoust sera lu avec fruit par tous ceux qui s'intéressent au progrès de la Géométrie. »

(*Revue des Sociétés savantes*, t. IV, p. 3.)

quis de l'Hôpital, dans laquelle l'étude des courbes est faite d'après des considérations directes, et toujours conformes à la nature des coordonnées indiquées par la question. L'ensemble des faits nouveaux, des formules élégantes, des belles constructions contenues dans ce Livre, qui suivit pourtant de si près la découverte du calcul des infiniment petits, aurait dû maintenir les géomètres dans la voie qui leur était ouverte et qui leur promettait d'importants succès. Ils en furent malheureusement distraits par l'influence que prit l'Analyse cartésienne, qui attira tout à elle, par suite de certains avantages prisés beaucoup trop haut. Grâce aux beaux travaux accomplis de nos jours dans la Géométrie infinitésimale et dans la doctrine des coordonnées curvilignes, le retour des géomètres vers les méthodes directes présentées par chaque question a commencé et se poursuivra au profit de la Géométrie.

Puissent le Livre que nous avons déjà publié et celui que nous publions aujourd'hui former un double anneau servant à rattacher les travaux des deux époques si éloignées l'une de l'autre : le second Livre, en complétant les recherches de ces grands géomètres, sur la Géométrie des courbes planes, le premier en montrant l'extension de ces recherches à la Géométrie des courbes tracées sur une surface quelconque !

En nous efforçant de rendre ce nouveau Livre digne, par la méthode, de l'attention des géomètres, nous avons aussi travaillé à donner une forme nette et correcte à nos calculs. Malgré cela, nous n'osons espérer que quelques erreurs ne s'y soient pas glissées. Plus les applications destinées à établir la fécondité d'une théorie sont nombreuses, plus les erreurs deviennent faciles, mais plus aussi elles perdent de leur importance, parce que l'unité et la simplicité de la méthode les rendent plus facilement reconnaissables.

ANALYSE INFINITÉSIMALE

DES

COURBES PLANES.

LIVRE PREMIER.

DES COURBES RAPPORTÉES A DIVERS SYSTÈMES DE COORDONNÉES SIMPLES.

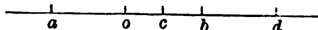
CHAPITRE PREMIER.

CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES.

Nous trouverons souvent deux sortes de relations, les premières exprimant que la somme des inverses de certaines longueurs est nulle, les secondes que la somme des inverses des carrés de certaines autres longueurs est aussi nulle, et nous aurons à construire, géométriquement, l'une de ces longueurs lorsque les autres sont connues. Nous allons montrer dans ce Chapitre par quelles considérations on peut effectuer facilement ces sortes de constructions : nous serons par là dispensé d'arrêter notre marche, lorsque des opérations de ce genre se présenteront sur nos pas dans les différents problèmes que nous aurons à résoudre, et nous n'aurons rien à emprunter à des livres étrangers.

1. *Division harmonique d'une longueur.* — Lorsque quatre points a, b, c, d (*fig.* 1) situés sur une ligne droite sont tels

Fig. 1.



que les distances des deux premiers au troisième et au qua-

trième forment une proportion, cette proportion est dite *harmonique ;* la longueur limitée par les deux premiers points est dite divisée *harmoniquement* par les deux autres points, et ces deux derniers sont appelés *conjugués harmoniques* par rapport aux deux premiers.

De ce que deux points c et d sont conjugués harmoniques par rapport à deux autres a et b, il résulte que les deux points a et b sont conjugués harmoniques par rapport aux points c et d. En effet les deux relations

$$(1) \qquad \frac{ca}{cb} = \frac{da}{db}, \quad \frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}$$

sont deux formes différentes d'une seule et même proportion.

2. *Positions relatives des deux points c, d'harmoniques conjugués de deux points fixes a, b.* — Si nous faisons mouvoir le point d à partir du point b vers l'infini positif, le point conjugué c marche, à partir du point b, en sens inverse jusqu'au point o milieu de ab ; de même, si le point d se meut de b en o, le conjugué c se meut de b jusqu'à l'infini positif.

Si nous faisons mouvoir le point d à partir de l'infini négatif jusqu'au point a, le point c conjugué marche en sens inverse à partir du point o, jusqu'au point a ; et si le point d se meut de a en o le point c se meut de a jusqu'à l'infini négatif.

3. *Expression trinôme de la division harmonique.* — Soit la proportion harmonique

$$\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd};$$

si l'on rapporte tous les segments au point a pris pour origine commune, elle devient

$$\frac{ac}{ad} = \frac{ab - ac}{ad - ab};$$

cette dernière relation s'écrit sous la forme

$$(2) \qquad \frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad}.$$

Si l'on avait pris le point c pour origine commune des segments, on aurait obtenu

$$(2') \qquad \frac{2}{cd} = \frac{1}{cb} - \frac{1}{ca}.$$

On déduit le théorème suivant :

L'inverse de la distance d'un point à son conjugué est la moyenne arithmétique des inverses des distances du même point aux deux autres.

Dans cette relation, il faut regarder comme positives ou négatives les distances comptées à partir de l'origine dans un sens ou dans le sens inverse.

4. *Introduction du point central.* — Le milieu o de la distance ab est appelé *point central*. Si l'on rapporte les quatre points a, b, c, d au point central o, on aura

$$ac = ao + oc, \quad ad = ao + od; \quad bc = bo - oc, \quad bd = do - ob;$$

d'après ces relations, la proportion harmonique donnera

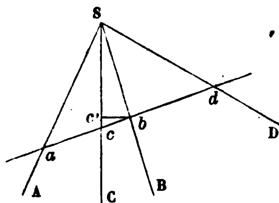
$$(3) \qquad \overline{bo}^2 = \overline{ao}^2 = oc.od,$$

d'où l'on déduit le théorème suivant :

Le demi-segment ab limité par deux points conjugués est moyen proportionnel entre les distances du milieu de ce segment aux deux autres points.

5. *Faisceaux harmoniques.* — Soient quatre droites SA, SB, SC, SD (*fig.* 2) issues d'un point S, lesquelles seront suffi-

Fig. 2.



samment désignées par les lettres A, B, C, D se rapportant à

des points quelconques de leur direction; si ces droites sont telles que les sinus des angles des deux premières avec la troisième et la quatrième sont en proportion, ces quatre droites forment *un faisceau harmonique;* les deux droites C, D sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux droites A et B; on dit aussi que l'angle des deux droites A et B est *divisé harmoniquement* par les deux autres droites C et D.

6. *Propriétés des faisceaux harmoniques.* — Soit le faisceau harmonique des quatre droites A, B, C, D, on a la proportion

$$(4) \qquad \frac{\sin(C, A)}{\sin(C, B)} = \frac{\sin(D, A)}{\sin(D, B)}.$$

Si nous coupons le faisceau par une transversale quelconque et que nous appelions a, b, c, d les points d'intersection de cette transversale et des droites du faisceau, il est évident que, dans le premier membre de l'égalité précédente, le rapport des sinus peut être remplacé par le rapport des distances des points b et a à la ligne C, divisé par le rapport des longueurs Sa, Sb, et dans le second membre, par le rapport des distances des mêmes points à la ligne D divisé par le rapport des longueurs Sa, Sb; si l'on simplifie et qu'on remplace les rapports des distances par les rapports égaux des segments correspondants, on tombe sur la proportion (1) harmonique des quatre points a, b, c, d. On a donc le théorème suivant :

Toute droite qui coupe un faisceau harmonique est divisée harmoniquement par les points d'intersection.

7. *Cas d'une transversale parallèle à l'une des droites du faisceau.* — Il résulte de ce que nous venons de dire que si la transversale est parallèle à l'une des droites du faisceau, elle sera coupée en deux parties égales par les trois autres.

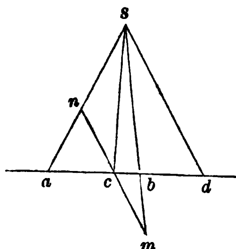
Cette conséquence peut s'établir directement de la manière suivante : soit mn (*fig.* 3) menée par c parallèlement à Sd; on a, à cause des parallèles,

$$\frac{ac}{cn} = \frac{ad}{Sd}, \quad \frac{cb}{cm} = \frac{bd}{Sd};$$

or, dans ces deux proportions, les premiers termes de chaque

rapport forment une proportion harmonique; donc les seconds

Fig. 3.



termes sont aussi en proportion, et comme Sd est commun, il en résulte que cn et cm sont égaux.

La proposition énoncée dans le n° 6 a pour proposition réciproque : *Si quatre droites d'un faisceau sont telles, que la parallèle à l'une d'elles soit coupée en deux parties égales par les trois autres, le faisceau est harmonique.* Il est évident que cette réciproque est vraie. En effet, on a les mêmes proportions que ci-dessus; or les seconds termes des rapports sont identiques deux à deux; donc les premiers termes forment une proportion qui exprime la division harmonique.

8. *Changement d'origine.* — Menons la bissectrice de l'angle des deux droites A, B; si l'on coupe le faisceau par une transversale perpendiculaire à cette bissectrice en un point o, les segments interceptés sur cette transversale jouissent des propriétés exprimées aux n°s 3 et 4; or, si du sommet du faisceau on décrit un cercle tangent à la transversale, le rayon de ce cercle étant pris pour unité, les segments comptés à partir du point o expriment les tangentes des angles correspondants à ces segments, et l'on a la relation

$$(5)\qquad \text{tang}^2(\text{B}, \text{O}) = \text{tang}(\text{O}, \text{C}) \,.\, \text{tang}(\text{O}, \text{D}).$$

Si l'on supposait la transversale perpendiculaire à la ligne A du faisceau en un point a, et que l'on prît pour origine des angles cette droite A, comme les segments interceptés par la transversale comptés à partir du point a jouissent de la propriété énoncée au n° 3, les tangentes des angles correspondant

à ces segments jouissent de la même propriété, et l'on a la relation suivante :

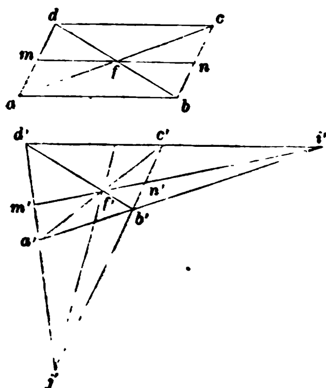
$$(6) \qquad \frac{2}{\tan g(A,B)} = \frac{1}{\tan g(A,C)} + \frac{1}{\tan g(A,D)}.$$

9. *Divisions harmoniques du quadrilatère complet.* — La propriété fondamentale de ce quadrilatère est la suivante :

Dans tout quadrilatère complet, la ligne qui joint le point de concours des diagonales avec le point de concours des deux côtés opposés est coupée harmoniquement par les deux autres côtés.

Soit un parallélogramme *abcd* et *f* le point d'intersection des diagonales, et *mn* parallèle à *ab*.

Fig. 4.



Si l'on prend un point quelconque S dans l'espace, et qu'on le joigne avec les points *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *m*, *n*, l'intersection S*i* des faces opposées S*dc*, S*ab* et l'intersection S*j* des faces opposées S*ad*, S*bc* se trouveront dans un plan parallèle au plan du parallélogramme; cela posé, coupons l'angle solide qui a son sommet en S par un plan quelconque, on obtiendra un quadrilatère complet dans lequel les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *f'* seront les points d'intersection du plan avec les arêtes S*a*, S*b*, S*c*, S*d*, S*f*; les points *i'*, *j'* seront les points de concours des

côtés opposés de ce quadrilatère. Or si l'on fait passer un plan suivant les deux arêtes Sf', Si', ce plan coupera les faces opposées de l'angle solide suivant deux droites Sm', Sn' qui seront les conjuguées harmoniques des deux droites Sf', Si', puisque la longueur mn est divisée en deux parties par le point f. Donc les quatre points m', n', f', i' sont en proportion harmonique.

Si l'on considère le quadrilatère f', c', i', b', les trois diagonales de ce quadrilatère complet sont $i'f'$, $c'b'$, $a'd'$, et les points m', n', j' sont les trois points de concours de ces diagonales prises deux à deux. On a donc le théorème suivant :

Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est coupée harmoniquement par les deux autres.

10. *Construction linéaire d'un segment de la division harmonique.* — Proposons-nous de construire linéairement un point b conjugué harmonique d'un point a donné par rapport à deux points c et d aussi donnés.

Prenez un point S *quelconque, joignez ce point aux points c et d par des droites, menez du point a une transversale quelconque, joignez ses points d'intersection avec* Sc *et* Sd *aux points d et c par des droites; le point d'intersection de ces deux droites et le point* S *déterminent une transversale qui coupe le segment cd au point b harmonique du point a.*

Cette construction est la conséquence immédiate du théorème précédent.

11. *Moyenne harmonique d'un nombre quelconque de segments.* — Si l'on a m points a, b, c, d,... en ligne droite, et qu'on détermine un point p, de telle sorte que l'inverse de sa distance à une origine fixe o, située sur cette droite, soit la moyenne arithmétique des inverses des m points à cette origine fixe, le segment op est appelé *moyenne harmonique des autres segments,* chaque segment devant être pris avec son signe; et le point p est dit *centre des moyennes harmoniques.* D'après cela, pour exprimer que le point p est le centre des moyennes harmoniques des m points a, b, c, ... par rapport

au point o, on a l'équation

$$(7)\qquad \frac{m}{op} = \frac{1}{oa} + \frac{1}{ob} + \frac{1}{oc} + \dots + \frac{1}{ol}.$$

Pour construire ce centre des moyennes harmoniques, cherchez le conjugué harmonique du point o par rapport aux points a et b, prenez le milieu b′ de la distance de ce point au point o, cherchez le conjugué harmonique du point o par rapport aux points b′ et c, prenez le milieu c′ de la distance de ce point au point o, répétez la même construction par rapport aux trois points o, c′ et d, et ainsi de suite, en répétant chaque fois la même opération ; vous arriverez finalement à un dernier point l′, en prenant ol′ m fois dans le sens ol′ ; vous obtiendrez le point p qui sera le centre des moyennes harmoniques cherché.

12. *Moyenne harmonique d'un nombre quelconque de carrés de segments donnés.* — D'après ce qui précède, si l'on a la relation

$$(8)\qquad \frac{m}{\overline{op}^2} = \frac{1}{\overline{oa}^2} + \frac{1}{\overline{ob}^2} + \frac{1}{\overline{oc}^2} + \dots + \frac{1}{\overline{ol}^2},$$

$\overline{op}^2$ sera la moyenne harmonique des carrés des segments oa, ob, oc, ..., ol. Il est évident que cette question se ramène à la précédente, car si l'on décrit un demi-cercle sur le plus grand des segments comme diamètre, que du point o on mène des cordes égales aux autres segments, et que l'on projette les extrémités de ces cordes sur le diamètre en des points p', a', b', c', ..., on aura

$$\frac{m}{op'} = \frac{1}{oa'} + \frac{1}{ob'} + \frac{1}{oc'} + \dots + \frac{1}{ol'};$$

la construction d'un des segments de cette relation au moyen des autres conduira donc à la construction d'un des carrés de la relation précédente au moyen des autres carrés.

Seconde solution de la question précédente. — Si l'on remarque que les côtés d'un triangle sont inversement proportionnels aux distances de ces côtés aux sommets opposés,

toute relation homogène entre les côtés existera entre les inverses des distances de ces côtés aux sommets opposés; d'après cela, un triangle ABC rectangle en A, et dont le pied de la perpendiculaire sur l'hypoténuse est α, donnera la relation

$$(9)\qquad \frac{1}{\overline{A\alpha}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}.$$

Donc pour construire le carré de op, déterminé par la relation (8) *du présent numéro, menez du point o deux longueurs rectangulaires égales à oa et ob; déterminez la distance b' du point o à la ligne qui joint les extrémités a et b, menez du point o perpendiculairement à ob' une longueur oc et répétez la construction précédente, et ainsi de suite, vous trouverez un point l' tel que*

$$(10)\qquad \frac{m}{op^2} = \frac{1}{ol'^2}.$$

La question est donc ramenée à construire un carré $\overline{op}^2$ *qui soit à un carré donné* $\overline{ol'}^2$ *dans le rapport de m à l'unité.*

Si la somme des inverses des carrés donnés était algébrique, on construirait deux longueurs $o\lambda$, $o\mu$, telles que l'inverse du carré de la première fût égale à la somme des inverses des carrés affectés du signe + et que l'inverse du carré de la seconde fût égale à la somme des inverses des carrés affectés du signe —, la question serait ramenée à construire ol' tel que l' satisfasse à la relation

$$\frac{1}{\overline{ol'}^2} = \frac{1}{\overline{o\lambda}^2} - \frac{1}{\overline{o\mu}^2};$$

or, si du point o comme centre avec un rayon égal à $o\lambda$, on décrit un cercle, qu'on mène une tangente à ce cercle et qu'ensuite on conduise du point o deux obliques sur cette tangente, l'une égale à $o\mu$ et l'autre perpendiculaire à cette dernière, la seconde oblique sera égale à ol', et la question sera encore ramenée à construire un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de m à l'unité.

Généralisation. — Il est facile de voir que les constructions précédentes s'appliquent au cas où l'on aurait à déterminer un segment par la condition que l'inverse de ce segment fût égal à la somme des inverses de segments donnés, chacun de ces inverses étant multiplié par une constante, ou bien au cas où l'on aurait à déterminer un segment par la condition que l'inverse du carré de ce segment fût égal à la somme des inverses de carrés donnés, chacun de ces inverses étant multiplié par une constante, de telle sorte que l'on aurait, suivant ces deux cas, les équations

$$(11) \qquad \frac{1}{op} = \sum \frac{\alpha}{oa}, \quad \frac{1}{\overline{op}^2} = \sum \frac{\alpha}{\overline{oa}^2},$$

dans lesquelles le signe Σ s'étendrait à tous les segments et à toutes les valeurs des constantes telles que α.

13. *Condition pour que trois points soient en ligne droite.* — Si les trois points a, b, c (*fig.* 2) sont en ligne droite, on a $ac = ab + bc$; or si l'on appelle p la perpendiculaire abaissée du point S sur la ligne $abcd$ et qu'on exprime chaque segment tel que ac en fonction du sinus de l'angle opposé des deux rayons menés du point S aux deux extrémités de ce segment et de la perpendiculaire p, on aura, en portant ces diverses valeurs dans l'égalité précédente, la relation

$$(12) \qquad \frac{\sin \widehat{AC}}{Sb} = \frac{\sin \widehat{AB}}{Sc} + \frac{\sin \widehat{BC}}{Sa}.$$

Si l'on compte un angle à partir de la première ligne exprimée sous le signe sinus jusqu'à la seconde, l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$(12') \qquad \frac{\sin \widehat{AB}}{Sc} + \frac{\sin \widehat{BC}}{Sa} + \frac{\sin \widehat{CA}}{Sb} = 0.$$

Condition pour que quatre points a, b, c, d soient en ligne droite. — On aura la condition

$$ad = ab + bc + cd,$$

qui conduira à la relation

$$(13) \qquad \frac{\sin\widehat{AB}}{Sc.Sd}+\frac{\sin\widehat{BC}}{Sd.Sa}+\frac{\sin\widehat{CD}}{Sa.Sb}+\frac{\sin\widehat{DA}}{Sb.Sc}=0,$$

et ainsi de suite, lorsqu'il s'agira d'un plus grand nombre de points.

Ces relations seront d'une grande utilité pour la construction géométrique de nos formules.



CHAPITRE II.

DES COURBES RAPPORTÉES A LEURS ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES.

§ I. — DES POLYGONES ET DE LEURS ÉQUATIONS.

14. *Détermination d'un polygone plan.* — Une droite XX′ peut être parcourue par un mobile en deux directions opposées, suivant que le mobile va de X′ en X, ou bien de X en X′; la première direction est X′X et la seconde XX′. D'après cela l'angle de deux droites est déterminé dès que l'on détermine les directions de ces droites.

Supposons qu'un mobile parcoure successivement les différents côtés d'un polygone plan, fermé ou non, ce mobile détermine les directions des côtés du polygone; or ce polygone sera déterminé de grandeur si l'on connaît les longueurs des côtés et les angles que les directions de ces côtés successifs forment entre elles; il sera de plus déterminé de position dans le plan, si l'un de ses côtés se trouve déterminé de position dans ce plan. Ce mode de détermination du polygone est le plus propre à faire connaître sa nature, puisqu'il suppose la connaissance de tous ses éléments : côtés et angles. Un polygone plan peut être déterminé de plusieurs autres manières, par exemple : par les positions des différents côtés, ou bien de ses différents sommets; mais on ne connaît pas alors directement la nature du polygone; ce n'est que par une suite de déductions que l'on parvient à connaître ses éléments, c'est-à-dire ses côtés et ses angles.

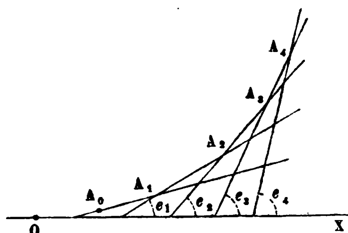
15. *Équations élémentaires du polygone.* — Soient A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (*fig.* 5) les sommets d'un polygone; l_0, l_1, l_2, $l_3, \ldots, l_n$ les longueurs de ses côtés; e_n l'angle que la direction du côté l_n fait avec la direction d'une droite fixe OX située dans le plan du polygone; l'angle des directions des deux côtés l_n, l_{n-1} sera

donné par la relation

(1) $$e_n - e_{n-1} = \Delta e_{n-1};$$

or si dans cette équation on donne à n toutes les valeurs pos-

Fig. 5.



sibles, depuis 1 jusqu'à n, et qu'on ajoute les équations résultantes, on aura

(1') $$e_n = e_0 + \sum_{0}^{n-1} \Delta e_k,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de k, depuis 0 jusqu'à $n - 1$.

Représentons par s_n la somme des côtés du polygone, depuis l_0 jusqu'à l_{n-1}, on aura la relation

(2) $$l_{n-1} = s_n - s_{n-1} = \Delta s_{n-1},$$

et en opérant comme nous venons de le faire, nous obtiendrons

(2') $$s_n = s_0 + \sum_{0}^{n-1} \Delta s_k,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de k, depuis 0 jusqu'à $n - 1$.

Si le polygone est déterminé, la loi des variations des angles Δe_{n-1} est connue, ainsi que la loi des variations des côtés, et réciproquement si l'on connaît la loi de la variation des angles du polygone et celle de la variation de ses côtés, de telle sorte

que l'on ait

$$(3)\qquad \Delta e_{n-1} = f(t_{n-1})\,\Delta t_{n-1},\quad \Delta s_{n-1} = \psi(t_{n-1})\,\Delta t_{n-1};$$

t_n étant une grandeur dont les variations font connaître les variations de e_n et de s_n, f et ψ des fonctions connues, le polygone sera déterminé.

Si l'on considère seulement les polygones pour lesquels la variation Δe_{n-1} est constante, le rapport de Δs_{n-1} à Δe_{n-1} suffira pour faire connaître tous les éléments du polygone, et si l'on représente par $\varphi(e_{n-1})$ ce rapport, on aura

$$(3')\qquad \frac{\Delta s_{n-1}}{\Delta e_{n-1}} = \varphi(e_{n-1}).$$

Les équations (3) dans le cas le plus général, et l'équation (3′) dans le cas où les variations des angles e_n sont constantes, déterminent tous les éléments du polygone, côtés et angles; nous les appellerons les *équations élémentaires du polygone*.

Supposons, par exemple, que Δe_k soit constant et égal à la $m^{\text{ième}}$ partie de 360 degrés, et que le rapport $\frac{\Delta s_k}{\Delta e_k}$ soit une constante a, le polygone sera régulier et de m côtés. Si Δe_k restant toujours constant et égal à $\frac{360}{m}$, le rapport de $\frac{\Delta s_k}{\Delta e_k}$ est égal à $a \sin \frac{e_k}{2}$, a étant une constante, le polygone aura tous ses angles égaux et les côtés proportionnels aux cordes que l'on obtient en partageant une circonférence en m parties égales et en joignant l'un des points de division aux autres par des diagonales.

16. *Équations du polygone dans le système de coordonnées rectilignes rectangulaires.* — Soient y_n, x_n les distances du sommet A_n à un axe OX, mené dans le plan du polygone et à un axe OY perpendiculaire, mené dans le même plan. En projetant le côté Δs_{n-1} sur ces axes et en appelant Δx_{n-1}, Δy_{n-1} ses projections, on aura

$$(4)\qquad \Delta x_{n-1} = \Delta s_{n-1} \cos e_{n-1},\quad \Delta y_{n-1} = \Delta s_{n-1} \sin e_{n-1},$$

desquelles on déduit, en ayant égard à l'équation (3') et en sommant les deux équations,

$$(4')\quad x_n - x_0 = \sum_0^{n-1} \Delta e_k\, \varphi(e_k) \cos e_k,\quad y_n - y_0 = \sum_0^{n-1} \Delta e_k\, \varphi(e_k) \sin e_k;$$

ces équations sont les équations des sommets du polygone, parce qu'elles déterminent les distances de ses sommets aux axes rectangulaires, au moyen de l'équation élémentaire du polygone.

Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon a et que l'on veuille avoir les projections sur les axes OX, OY du quatrième sommet A_4 du polygone, on aura, d'après les formules (4'),

$$x_4 - x_1 = a\Delta e_1[\cos e_1 + \cos(e_1 + \Delta e_1) + \cos(e_1 + 2\Delta e_1)],$$
$$y_4 - y_1 = a\Delta e_1[\sin e_1 + \sin(e_1 + \Delta e_1) + \sin(e_1 + 2\Delta e_1)];$$

dans lesquelles Δe_1 est égale à 36 degrés.

On peut écrire ces deux formules sous la forme suivante :

$$x_4 - x_1 = a\Delta e_1(1 + \cos\Delta e_1 + \cos 2\Delta e_1)\cos e_1 - a\Delta e_1(\sin\Delta e_1 + \sin 2\Delta e_1)\sin e_1,$$

$$y_4 - y_1 = a\Delta e_1(1 + \cos\Delta e_1 + \cos 2\Delta e_1)\sin e_1 + a\Delta e_1(\sin\Delta e_1 + \sin 2\Delta e_1)\cos e_1.$$

17. *Équations du polygone dans un système oblique à angles variables.* — Parmi les différents systèmes de coordonnées rectilignes propres à déterminer le polygone, il en est un qui a l'avantage de faire connaître les sommets des polygones, les lignes sur lesquelles se trouvent les différents côtés et les positions des côtés sur ces lignes. C'est ce système que nous allons définir. Prolongeons le côté l_n jusqu'à la rencontre de la droite fixe OX en B_n; appelons X_n la longueur OB_n et r_n, la distance A_nB_n du point B_n au sommet A_n; X_n et r_n seront des fonctions de e_n qui détermineront non-seulement A_n, mais encore la ligne qui contient le côté l_n. Ce sont les coordonnées que nous voulions définir.

Il est facile de trouver l'expression de ces coordonnées en fonction de l'angle e_n; en effet, si l'on projette r_n tantôt sur l'axe des y, tantôt sur l'axe des x, on a les deux équations

$$(5) \qquad r_n \sin e_n = y_n, \quad x_n - X_n = r_n \cos e_n;$$

or, si l'on a égard à la deuxième des équations (4'), la première des équations (5) devient

$$(6) \qquad r_n = \frac{1}{\sin e_n}\left[y_0 + \sum_0^{n-1} \Delta e_k \sin e_k\, \varphi(e_k)\right];$$

et si l'on élimine de la seconde r_n au moyen de l'équation que nous venons de trouver, et x_n au moyen de la première des équations (4'), on trouve, après avoir posé $x_0 = r_0 \cos e_0$ et $y_0 = r_0 \sin e_0$, l'équation suivante

$$(7) \quad X_n = \frac{1}{\sin e_n}\left[r_0 \sin(e_n - e_0) + \sum_0^{n-1} \Delta e_k\, \varphi(e_k) \sin(e_n - e_k)\right].$$

Dans ces équations comme dans les précédentes, le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de k depuis 0 jusqu'à $n-1$.

§ II. — Des courbes planes.

18. *Définitions.* — Une courbe est un polygone dont les côtés sont infiniment petits.

Chaque côté peut être considéré comme un élément de l'arc de cette courbe; la droite qui contient cet élément s'appelle *tangente* à la courbe au point que l'on considère.

L'angle formé par les directions de deux éléments successifs s'appelle *angle de contingence*. C'est *la déviation* infiniment petite qu'éprouve la direction d'un élément pour coïncider avec la direction de l'élément suivant; cet angle peut être positif ou négatif, suivant qu'il faut le compter dans une direction ou dans la direction opposée.

Si, au lieu de considérer deux éléments consécutifs, on considère deux éléments quelconques de la courbe, il est visible que l'angle que forment entre elles les directions de ces deux

éléments est la somme des déviations positives ou négatives que subit la direction de l'un de ces éléments pour coïncider avec la direction de l'autre élément; on l'appelle *déviation* d'un élément par rapport à l'autre élément.

Si l'on prend deux points quelconques sur la circonférence d'un cercle dont le rayon est R et qu'on mène deux tangentes en ces points, le rapport de l'angle de ces tangentes à l'arc compris entre ces deux points est constant, quelle que soit la longueur de l'arc, et égal à l'inverse du rayon; $\frac{1}{R}$ mesure le *rapport de la déviation* à l'arc compris entre ces deux points; on l'appelle *courbure du cercle.*

Soient maintenant AA', $A'A''$ deux éléments successifs d'une courbe dont l'arc, compté à partir d'un point fixe, est s; soit de l'angle de ces deux éléments; si par les trois points A, A', A'', infiniment voisins, on fait passer un cercle, ce cercle sera déterminé; sa courbure mesure *la courbure* de la courbe. Son centre et son rayon s'appellent *centre de courbure* et *rayon de courbure* de la courbe au point A. Si l'on représente par R ce rayon, on aura la relation

$$\frac{1}{R} = \frac{de}{ds}. \tag{8}$$

19. *De l'équation élémentaire de la courbe.* — Revenons à l'équation (3') du n° 15; si le polygone considéré dans ce numéro devient infinitésimal, cette équation deviendra

$$\frac{ds}{de} = \varphi(e), \tag{3''}$$

dans laquelle le premier membre est le rapport de l'élément de l'arc de la courbe à l'angle de contingence ou déviation élémentaire, et le second membre une fonction déterminée de la déviation de cet élément par rapport à un élément déterminé de cette courbe. Cette équation est l'*équation élémentaire de la courbe.* Elle a un avantage sur toute autre équation propre à représenter la courbe en ce qu'elle caractérise la courbe directement et sans auxiliaires, tandis que les autres

équations reposent sur des quantités qui sont étrangères à la nature de la courbe, que l'on peut toujours concevoir sans l'appui de ces quantités.

La définition qui sera la traduction géométrique de l'équation élémentaire sera aussi appelée ***définition élémentaire de la courbe***, et aura cet avantage sur les autres définitions de la même courbe, qu'elle fera connaître la courbe directement et sans l'introduction d'aucun auxiliaire géométrique, point, ligne, angle, étranger à la courbe. Le centre du cercle est un point étranger au cercle, les foyers de l'ellipse sont des points étrangers à l'ellipse et ne sauraient appartenir à ces courbes.

L'équation élémentaire de la courbe fait connaître directement le rayon de la courbure de cette courbe, car, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, on a

$$R = \varphi(e). \tag{9}$$

Elle donne la rectification de l'arc de courbe correspondant à deux valeurs de e, e_0 et e.

$$s - s_0 = \int_{e_0}^{e} \varphi(e)\,de. \tag{10}$$

Enfin elle donne l'aire balayée par le rayon de courbure pour toute la longueur de cet arc. La différentielle du de cette aire est égale à $\frac{1}{2}R^2 de$; et par une intégration entre les limites e_0 et e, on trouve la relation

$$u - u_0 = \frac{1}{2}\int_{e_0}^{e} \overline{\varphi(e)}^2\, de. \tag{11}$$

Ainsi, soit la courbe dont l'équation élémentaire est

$$\frac{ds}{de} = m a^e,$$

m et a étant deux constantes, on trouve les trois relations

$$R = m a^e, \quad s = \frac{1}{l.a}(R - R_0), \quad u = \frac{1}{4\,l.a}(R^2 - R_0^2);$$

l'arc s et l'aire u étant comptés à partir de la valeur nulle de e; R_0 étant le rayon de courbure correspondant à la valeur zéro de e.

20. *Coordonnées rectangles d'une courbe donnée par son équation élémentaire.* — Il est aisé de voir que, dans le cas du polygone infinitésimal, les formules (4), (4′) du n° 14 deviennent

$$[4] \qquad \frac{dx}{ds} = \cos e, \quad \frac{dy}{ds} = \sin e;$$

$$[4'] \quad x - x_0 = \int_0^e \varphi(e) \cos e\, de, \quad y - y_0 = \int_0^e \varphi(e) \sin e\, de.$$

Ce sont les deux équations de la courbe en coordonnées rectangles. Si l'on élimine e entre ces deux équations, on aura une équation unique entre ces deux coordonnées.

Applications. — 1° Courbe dont l'équation élémentaire est $\frac{ds}{de} = a$, a étant une constante. Les équations [4′] donnent

$$x - x_0 = a \sin e, \quad y - y_0 - a = -a \cos e;$$

si l'on élève au carré et qu'on ajoute, on obtient l'équation du cercle

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2a(y - y_0) = 0.$$

2° Courbe dont l'équation élémentaire est $\frac{ds}{de} = ma^e$, m et a étant constants. En intégrant, par parties, les deux équations [4′], on obtient

$$(x - x_0) + la(y - y_0) = ma^e \sin e, \quad y - y_0 - la(x - x_0) = ma^e \cos e.$$

Si l'on égale à zéro les deux premiers membres de ces deux équations, on obtient les équations de deux droites dans le système rectangulaire formant entre elles un angle droit; or, si l'on appelle Y, X les perpendiculaires abaissées d'un point de la courbe sur ces deux droites, on aura

$$Y\sqrt{1 + \overline{la}^2} = ma^e \sin e, \quad X\sqrt{1 + \overline{la}^2} = ma^e \cos e;$$

divisant l'un par l'autre on obtient

$$\frac{Y}{X} = \text{tang}\, e.$$

Si l'on élève les mêmes équations au carré, qu'on les ajoute et qu'on représente par $\frac{1}{k}$ le facteur de X et de Y, on obtient

$$X^2 + Y^2 = k^2 m^2 a^{2e},$$

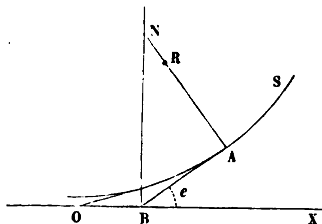
et par l'élimination de e l'on trouve

$$X^2 + Y^2 = k^2 m^2 a^{2 \,\text{arc tang} = \frac{Y}{X}},$$

équation de la spirale logarithmique.

21. *Système de coordonnées tangentielles.* — Dans l'hypothèse du polygone infinitésimal (*fig.* 6), les coordonnées obli-

Fig. 6.



ques que nous avons considérées dans le n° 17 restent finies et deviennent r et X ; le rayon mobile r est la tangente à la courbe, comptée à partir du point de contact jusqu'à sa rencontre en B avec l'axe fixe OX. Cet axe peut être supposé coïncider avec une tangente à la courbe en un point déterminé O, et la coordonnée X est la portion de cette tangente comptée à partir du point O jusqu'au point B; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire. Ce système de coordonnées tangentielles à la courbe se prête avec facilité à l'étude de toute courbe

donnée par son équation élémentaire et devient, dans ce cas, d'une grande utilité.

Pour obtenir les valeurs de ces coordonnées en fonction de e, il faut supposer Δe infiniment petit dans les formules du nº 17 et alors on obtient les deux relations

$$(6') \qquad r \sin e = y_0 + \int_{e_0}^{e} \varphi(e) \sin e\, de,$$

$$(7') \qquad \begin{cases} X \sin e = r_0 \sin(e - e_0) + \sin e \displaystyle\int_{e_0}^{e} \varphi(e) \cos e\, de \\ \qquad - \cos e \displaystyle\int_{e_0}^{e} \varphi(e) \sin e\, de. \end{cases}$$

On obtient ces formules directement, car on a

$$y = r \sin e, \quad X = x - y \cot e.$$

22. *Équations différentielles dans le système tangentiel.* — Soient r, $r + dr$ deux rayons successifs, dX la différence des X correspondantes ; ces trois lignes forment un triangle dont le périmètre projeté d'abord sur l'axe OX, et ensuite sur une direction perpendiculaire au rayon r, donne les deux équations

$$(12) \qquad d(s - r) = dX \cos e, \quad r\, de = dX \sin e,$$

desquelles on déduit l'équation suivante

$$ds = \frac{d(r \sin e)}{\sin e}.$$

L'aire de ce triangle est la différentielle de l'aire balayée par le rayon mobile r. Si on la représente par du, l'on a

$$(13) \qquad du = \frac{1}{2} r^2 de.$$

Si l'on élimine dX entre les deux équations (12), on trouvera la différentielle de l'équation (6′), et en ayant égard à la valeur de r fournie par cette équation, la seconde équation (12) coïncidera avec la différentielle de l'équation (7′).

Interprétation des formules. — Pour interpréter géométriquement les équations (12), il faut remarquer que la dérivée $\frac{dX}{de}$ exprime le quotient de la vitesse avec laquelle le point d'intersection B du rayon r avec l'axe fixe OX se déplace sur cet axe, par la vitesse angulaire du rayon mobile r autour de ce point. Ce rapport étant essentiellement linéaire, nous le représentons par D. La deuxième équation (12) montre que, si par le point B on élève une perpendiculaire à l'axe OX jusqu'à la rencontre du rayon de courbure de la courbe, cette perpendiculaire sera égale à D; elle exprimera le rapport des vitesses et la première des équations (12), qui devient

$$\frac{dr}{de} = R - D\cos e,$$

montre que cette perpendiculaire intercepte sur le rayon de courbure un segment compté à partir du centre de courbure égal à $\frac{dr}{de}$, de sorte que cette dérivée représente la différence entre le rayon de courbure et la projection de D sur le rayon de courbure.

Intégrales des équations différentielles de la courbe. — Les coordonnées tangentielles se déduisent aussi de l'intégration des équations (12). La première de ces équations donne

$$(6'') \qquad r\sin e = \int \frac{ds}{de}\sin e\,de,$$

et en portant la valeur de r dans la seconde, on obtient, après intégration,

$$(7'') \qquad X = \int \left(\frac{de}{\sin^2 e} \int \frac{ds}{de} \sin e\,de \right),$$

et il est aisé de voir que ces valeurs coïncident avec celles qui sont fournies par les équations (6′) et (7′).

De la normale à la courbe. — Si par un point pris sur la courbe on élève une perpendiculaire sur la tangente en ce point, cette perpendiculaire est la normale à la courbe. La

longueur de cette normale est comptée à partir du point pris sur la courbe jusqu'au point d'intersection de la normale avec l'axe. Soit N cette longueur, il est visible que l'on a

$$(14) \qquad N = r \tang e = \frac{1}{\cos e} \int \frac{ds}{de} \sin e\, de.$$

Si, avec une ouverture de compas égale à R, on décrit du point pris sur la courbe comme centre un cercle, les deux segments déterminés par ce cercle sur la normale à partir du pied de la normale sont N + R, N — R; or, si l'on remplace N et R par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on trouvera la double expression suivante :

$$(15) \qquad N \pm R = \frac{d(r \sin e \cos^{\mp 1} e)}{de \sin e \cos^{\mp 1} e},$$

dans laquelle les signes supérieurs ou bien les signes inférieurs doivent être pris ensemble.

23. *Courbe polaire des rayons égaux et parallèles.* — Construisons la courbe dont les rayons vecteurs issus d'un point fixe soient égaux et parallèles aux rayons tangents r de la courbe donnée. Cette courbe aura pour équation l'équation (6'), dans laquelle r sera le rayon vecteur et e l'angle polaire compté à partir d'une droite parallèle à OX menée du point fixe. Cette courbe auxiliaire jouit de plusieurs propriétés par rapport à la courbe donnée.

1° Soit ds_1 l'élément d'arc de cette courbe auxiliaire ; a l'angle de la tangente en un point avec le rayon vecteur ; e_1 l'angle qu'elle fait avec l'axe fixe; N sa normale, on a pour cette courbe les équations :

$$(16) \qquad dr = ds_1 \cos a, \quad r\,de = ds_1 \sin a, \quad dr = r\,de \cot a;$$

or, si l'on remplace dans la dernière des équations (12) $\dfrac{ds}{de}$ par sa valeur R et $\dfrac{dr}{de}$ par la valeur que nous venons de trouver,

on aura

$$(17) \qquad \frac{R}{r} = \cot e + \cot a = \frac{\sin(e+a)}{\sin e \sin a}.$$

Si l'on remarque que $e_1 = e + a$ et que $\frac{r}{\sin a}$ n'est autre chose que la normale N à la courbe auxiliaire, l'équation précédente devient

$$(17') \qquad R \sin e = N \sin e_1.$$

On conclut de cette équation :

THÉORÈME. — *La projection de la normale à la courbe polaire et la projection du rayon de courbure de la courbe donnée sur la direction de l'axe fixe sont égales.*

Ce théorème donne immédiatement la construction géométrique du rayon de courbure de la courbe donnée, quand la courbe auxiliaire est connue, comme nous le verrons dans la suite.

2° Soit du_1 l'élément de l'aire de la courbe auxiliaire, on a $du_1 = \frac{1}{2} r^2 de$. *Donc l'aire de la courbe polaire et l'aire de la courbe donnée seront égales, ces aires étant terminées, ce qui est toujours possible, par deux rayons égaux et parallèles.*

Ce théorème donne la quadrature de la courbe donnée au moyen de la quadrature de la courbe auxiliaire.

3° Si, dans la première des équations (12), on remplace dr par sa valeur tirée de l'équation de la courbe auxiliaire, on aura

$$(18) \qquad ds = ds_1 \cos a + dX \cos e;$$

de là on conclut que les trois éléments ds, ds_1, dX sont tels, qu'en leur conservant leurs directions et leurs grandeurs un triangle est toujours constructible sur ces éléments, les angles opposés à ces éléments étant $\pi - e - a$, e, a. On a donc aussi

$$ds^2 = ds_1^2 + dX^2 + 2 ds_1 dX \cos(e+a).$$

Ceci montre comment la rectification de la courbe donnée se déduira de la rectification de la courbe auxiliaire.

§ III. — Application des théories précédentes.

24. Problème I. — *Quelle est la courbe dont le rayon de courbure est égal à la projection d'une droite donnée de grandeur et de position sur la normale.*

Soit $2m$ cette droite donnée; prenons pour axe OX la perpendiculaire menée par l'une de ses extrémités : si e est l'angle que la tangente à la courbe cherchée fait avec OX, on aura

$$R = 2m \cos e.$$

L'équation élémentaire de la courbe est donc

$$\frac{ds}{de} = 2m \cos e.$$

Si l'on veut trouver les équations de la courbe dans le système rectangulaire, on fera usage des formules [4'], et l'on trouvera, après intégration et détermination des constantes par la condition que les coordonnées soient nulles en même temps que e, les deux équations suivantes :

$$y = m \sin^2 e, \quad x = me + m \cos e \sin e;$$

l'élimination de e entre ces deux équations conduit à l'équation de la courbe dans le système cartésien

$$x = m\left[\arc \sin = \sqrt{\frac{y}{m}} + \sqrt{\frac{y}{m}\left(1 - \frac{y}{m}\right)}\right],$$

qui est celle d'un cycloïde rapporté à son sommet.

Si l'on emploie le système tangentiel, les coordonnées sont

$$X = me, \quad r = m \sin e;$$

elles font reconnaître à l'instant que la courbe est décrite par un point de la circonférence du cercle dont le diamètre est m,

roulant sur une parallèle à l'axe OX, située à une distance m de cet axe, et le point décrivant coïncidant avec l'origine des X au commencement du mouvement. L'emploi de la courbe polaire auxiliaire est d'une grande utilité; l'équation de cette courbe étant $r = m \sin e$, on reconnaît qu'elle représente un cercle égal au cercle roulant, et dont l'origine des rayons vecteurs se trouve sur la circonférence; par conséquent, si l'on identifie le cercle auxiliaire avec le cercle roulant e dans une de ses positions, on conclura, n° 23 :

1° Que la tangente à la cycloïde, ou le rayon vecteur de la courbe auxiliaire, est la ligne qui joint le point décrivant avec le point de contact du cercle avec l'axe OX;

2° Que la normale de la courbe auxiliaire, ou bien le diamètre du cercle mené par le point décrivant, a sa projection sur l'axe OX, identique avec celle du rayon de courbure de la cycloïde en ce point; ce qui donne la propriété connue de ce rayon de courbure, ainsi qu'une construction simple de ce rayon, différente de celle qui résulte de l'équation élémentaire de cette courbe;

3° Que l'aire comprise entre la cycloïde, sa tangente et l'axe, est égale à l'aire du segment du cercle roulant, intercepté par la tangente à la cycloïde;

4° Que le double de cette tangente est égal à la longueur de l'arc cycloïdal correspondant. Cette dernière propriété est la conséquence immédiate de la formule du n° 23, relative à la rectification de la courbe donnée.

Toutes ces propriétés se présentent comme conséquences directes de l'emploi des coordonnées tangentielles et de l'introduction de la courbe polaire. Les constructions simples et déjà connues qui en résultent appartiennent donc à une théorie générale dont elles dérivent naturellement.

On déduit facilement de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un point d'une droite mobile reste sur une droite fixe, et que la droite mobile tourne autour de ce point, de telle sorte que le rapport de la vitesse de translation du point à la vitesse angulaire de la droite soit constant, cette droite enveloppe une cycloïde, et le diamètre du cercle générateur est égal au rapport des vitesses.*

25. **Problème II.** — *Quelle est la courbe telle que les parallèles à une direction donnée, menées des différents centres de courbure, interceptent sur les tangentes correspondantes, à partir du point de contact, une longueur constante* D ?

Supposons que la direction donnée est perpendiculaire à l'axe OX; en conservant les notations précédentes, on aura

$$R = D \cot e.$$

L'équation élémentaire est donc

$$\frac{ds}{de} = D \cot e.$$

En faisant usage des formules [4′], on trouvera les équations de la courbe dans le système rectangulaire. Or, si l'on détermine les constantes par la condition que pour

$$e = \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = D,$$

ces équations sont :

$$y = D \sin e, \quad x = D\left(\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} e + \cos e\right).$$

Si l'on emploie le système tangentiel, les coordonnées X et r relatives à ce système deviennent

$$r = D, \quad X = D \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} e, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} e = E^{\frac{X}{D}},$$

E étant la base des logarithmes népériens.

La courbe polaire auxiliaire est un cercle rapporté à son centre, et dont le rayon est D; ce cercle auxiliaire donne toutes les propriétés de la courbe cherchée. En effet, les valeurs de X, dans le cas où D est l'unité, n'étant autre chose que les nombres que l'on trouve dans les tables trigonométriques à la colonne des tangentes, correspondant aux valeurs successives

de l'angle $\frac{1}{2}e$, si l'on construit la valeur de X correspondant à une valeur de $\frac{1}{2}e$, et que de l'extrémité de X on décrive le cercle dont D est le rayon, le rayon de ce cercle, formant l'angle e avec l'axe OX, sera la tangente à la courbe, et son extrémité le point de contact. Si l'on se reporte aux théorèmes du n° 23, l'on voit :

1° Que la tangente au cercle menée au point où il rencontre la courbe jusqu'à l'intersection de la perpendiculaire à l'axe OX menée par le centre du cercle n'est autre chose que le rayon de courbure de la courbe;

2° Que le secteur circulaire compris entre cette perpendiculaire et le rayon r que nous considérons sera l'aire de la courbe balayée par le rayon mobile pour les valeurs de e comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}+e$;

3° Que l'on a $s = \mathrm{D} \log \sin e$, l'arc de la courbe s étant compté à partir de la valeur $\frac{\pi}{2}$ de e jusqu'à $\frac{\pi}{2}+e$; et que, par conséquent, dans le cas où D est l'unité, les valeurs de s sont les nombres que l'on trouve à la colonne des sinus dans les tables trigonométriques correspondant aux valeurs successives de e.

Corollaire. — La valeur de X donne, par la différentiation,

$$\frac{d\mathrm{X}}{de} = \frac{\mathrm{D}}{\sin e};$$

elle montre que la courbe que nous venons d'étudier est l'enveloppe d'une droite mobile tournant autour d'un de ses points, assujetti à se mouvoir sur une ligne fixe, de telle sorte que le rapport de la vitesse angulaire à la projection de la vitesse de translation sur la droite mobile soit un nombre constant.

26. PROBLÈME III. — *Quelle est la courbe telle que la tangente terminée à un axe fixe est égale à la longueur que l'on obtient en projetant successivement le rayon de courbure sur une direction parallèle à l'axe, et cette projection sur la direction de la tangente?*

En conservant les notations précédentes, on a

$$\frac{ds}{de}\cos e \sin e = r.$$

Si dans cette équation on remplace $\frac{ds}{de}$ par sa valeur donnée par la troisième des équations (12) du n° 22, on aura, après réduction, l'équation

$$r \sin e\, de + \cos e\, dr = 0,$$

dont l'intégrale est

$$r \cos e = p,$$

p étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. Si l'on a égard à cette équation, on obtient

$$\frac{ds}{de} = \frac{p}{\cos^2 e \sin e},$$

qui est l'équation élémentaire de la courbe cherchée.

En faisant usage des formules [4′] du n° 20, on trouve les équations de la courbe dans le système rectangulaire

$$y = p \operatorname{tang} e, \quad x = p \log \operatorname{tang} e, \quad \operatorname{tang} e = \mathrm{E}^{\frac{x}{p}},$$

les constantes étant déterminées par la condition que, pour e égal à zéro, x devienne infinie et y s'annule. L'élimination de e entre ces deux équations conduit à l'équation de la courbe entre les deux variables x, y. Cette équation est la logarithmique

$$y = p\mathrm{E}^{\frac{x}{p}},$$

dans laquelle E est la base des logarithmes népériens.

Dans le système tangentiel, les équations de la courbe sont

$$\mathrm{X} = p \log \operatorname{tang} e - p, \quad r = \frac{p}{\cos e}.$$

La courbe polaire auxiliaire est une droite perpendiculaire

à l'axe menée à une distance p du pôle. Les valeurs de X s'obtiennent comme dans le numéro précédent. Cela posé, si l'on construit la valeur de X correspondant à une valeur de e, et qu'on élève une perpendiculaire à l'axe à une distance p de l'extrémité de X, le rayon vecteur mené de cette extrémité comme pôle, formant l'angle e avec l'axe, sera la tangente à la logarithmique et rencontrera la perpendiculaire au point de contact; on voit ainsi, d'après le n° 23 :

1° Que la normale à la courbe polaire auxiliaire étant la parallèle à l'axe menée par le point de contact jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire au rayon vecteur mené au pôle, cette parallèle est la projection du rayon de courbure de la logarithmique;

2° Que le triangle rectangle dont r est l'hypoténuse et p l'un des côtés de l'angle droit, et e l'angle compris entre ces deux droites, a une aire égale à l'aire balayée par le rayon mobile de la logarithmique, depuis e égal à zéro jusqu'à e égal à e;

3° Que si l'on fait usage du théorème (3) du n° 23, l'on aura

$$ds = dX \cos e + ds_1 \sin e,$$

et par suite

$$ds = \frac{p\,de}{\sin e} + p\frac{\sin e}{\cos^2 e}de;$$

donc l'intégrale est

$$s - s_0 = p \log \frac{\tang \frac{1}{2} e}{\tang \frac{1}{2} e_0} + p\left(\frac{1}{\cos e} - \frac{1}{\cos e_0}\right),$$

s_0 étant la valeur de s correspondant à la valeur e_0 de e.

27. Problème IV (généralisation du problème précédent). — *Trouver la courbe telle que la tangente terminée à un axe fixe est dans un rapport constant avec la longueur que l'on obtient en projetant successivement le rayon de courbure sur une direction parallèle à l'axe, et cette projection sur la direction de la tangente.*

Soit m ce rapport, on aura

$$\frac{ds}{de}\cos e \sin e = mr;$$

or si l'on a égard à la valeur de $\frac{ds}{de}$ donnée par la troisième des équations (12), on aura l'équation

$$\frac{d(r\sin e)}{r\sin e} = m\frac{\frac{de}{\cos^2 e}}{\text{tang}\, e}.$$

Soit $m > 1$, l'intégrale de l'équation précédente est

$$r\sin e = p\,\text{tang}^m e,$$

dans laquelle p est la constante d'intégration.

On déduit sans difficulté les relations

$$\text{R} = mp\frac{\sin^{m-2} e}{\cos^{m+1} e}, \quad \text{X} = \frac{p}{m-1}\text{tang}^{m-1} e, \quad \frac{r}{\text{X}} = (m-1)\frac{\text{tang}\, e}{\sin e}.$$

Coordonnées rectangulaires. — On les obtient en faisant usage des formules [4′]

$$x = \frac{mp}{m-1}\text{tang}^{m-1} e, \quad y = p\,\text{tang}^m e, \quad x^m = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m py^{m-1}.$$

Courbe polaire auxiliaire. — $x^m = py^{m-1}$ parabole semblable à la précédente et semblablement placée.

Tangente. — Si l'on construit la parabole dont le paramètre est $\left(\frac{m}{m-1}\right)^m p$, et qu'on mène une tangente en un de ses points jusqu'à la rencontre de l'axe de X, si d'une autre part on construit une parabole semblable et semblablement placée, ayant son sommet en X et un paramètre égal à p, la deuxième rencontrera la première en son point de contact avec la tangente.

Rayon de courbure. — La normale à la seconde parabole, terminée à sa rencontre avec la perpendiculaire au rayon r au

point X, aura la même projection sur l'axe que le rayon de courbure de la première parabole.

Quadrature. — L'aire de la première parabole, balayée par le rayon mobile r du système tangentiel, est égale au secteur parabolique compris entre l'arc de la seconde parabole et le rayon vecteur r du système polaire.

Si l'on a $m < 1$, on obtient une série de courbes hyperboliques qui se discutent de la même manière.

28. Problème V. — *Trouver la courbe telle, que si l'on projette son rayon de courbure sur une direction donnée, cette projection sur la direction du rayon de courbure, la projection obtenue sur la direction donnée et ainsi de suite, m étant le nombre des projections successives, on obtient une longueur constante b.*

Équation élémentaire. — Ce problème donne une famille de courbes que l'on obtient en donnant à m toutes les valeurs entières possibles. Nous représentons dans ces différentes courbes les variables analogues par les mêmes lettres affectées de l'indice égal à la valeur de m propre à ces courbes. Supposons de plus que, pour toutes ces courbes, ces variables correspondent simultanément aux mêmes valeurs de e, ce qui revient à dire que l'on y considère des points pour lesquels les tangentes sont parallèles entre elles, nous appelons ces points *points correspondants.* L'équation élémentaire de la courbe cherchée est

$$\frac{ds_m}{de} = \frac{b}{\sin^m e}.$$

Rectification. — Si l'on intègre par parties l'équation précédente et que l'on place l'origine des arcs aux points pour lesquels $e = \frac{\pi}{2}$, l'on a

$$s_m = -\frac{b}{m-1}\frac{\cos e}{\sin^{m-1} e} + \frac{m-2}{m-1}s_{m-2}.$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$s_m = -\frac{R_{m-1}\cos e}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}s_{m-2}.$$

Si l'on suppose m pair, on obtient

$$s_m = -\frac{\cos e}{m-1}\left[R_{m-1} + \frac{m-2}{m-3}R_{m-3} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)}R_{m-5} + \ldots + \frac{(m-2)\ldots 4.2}{(m-3)\ldots 3.1}R_1\right].$$

Dans le cas où m est impair, on a

$$s_m = -\frac{\cos e}{m-1}\left[R_{m-1} + \frac{m-2}{m-3}R_{m-3} + \cdots + \frac{(m-2)\ldots 5.3}{(m-3)\ldots 4.2}R_2\right] + \frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-4\ldots 3.1}{m-3\ldots 4.2}s_1.$$

Coordonnées rectangles. — Si l'on fait usage des formules [4'] et que l'on détermine les constantes par la condition que pour $e = \frac{\pi}{2}$, $x_m = -\frac{b}{m-1}$ et $y_m = 0$, on obtient

$$x_m = -\frac{b}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} e}, \quad = -\frac{R_m \sin e}{m-1}, \quad y_m = s_{m-1}.$$

Coordonnées tangentielles. — Ces coordonnées sont données par les formules suivantes :

$$X_m = x_m - y_m \cot e, \quad r_m = \frac{y_m}{\sin e},$$

desquelles on déduit

$$X_m = -\frac{R_{m-1}}{m-1} - s_{m-1}\cot e, \quad r_m = \frac{s_{m-1}}{\sin e}.$$

Normale. — Si l'on appelle N_m la normale terminée à l'axe des y, on a

$$N_m = \frac{x_m}{\sin e} = \frac{-R_m}{m-1} = \frac{-b}{(m-1)\sin e}.$$

Construction de la courbe. — D'après les formules précédentes, on voit que l'arc s_m est une fonction linéaire des rayons de courbure menés en des points correspondants de la série des courbes d'ordre pair ou impair; or les coordonnées rec-

tangles de la courbe de rang m sont telles, que l'ordonnée est égale à l'arc du rang $(m-1)$, et que l'abscisse est dans un rapport constant avec la projection du rayon de courbure sur l'axe des x ; par conséquent la construction de ces coordonnées ne dépend que de la construction du rayon de courbure. Il en est de même de la construction de toutes les lignes qui caractérisent la courbe. La construction du rayon de courbure est elle-même d'une grande facilité, puisqu'elle ne dépend que d'une série de perpendiculaires élevées successivement sur les deux côtés d'un angle égal à e, à partir du point distant du sommet d'une longueur b prise sur l'un des côtés ; comme cela ressort de la définition élémentaire de la courbe.

Parmi les propriétés communes aux courbes de cette famille il faut distinguer celle relative à la normale N_m.

Dans chaque courbe, le rayon de courbure est à la normale dans un rapport constant qui est toujours un nombre entier, et l'abscisse est toujours égale à la projection de la normale sur l'axe des x.

29. *Des courbes les plus simples contenues dans la famille* $\frac{ds_m}{de}=\frac{b}{\sin^m e}$. — Ces courbes correspondent aux hypothèses :

1°
$$m=0;\quad \frac{ds_0}{de}=b.$$

Cette hypothèse donne l'équation élémentaire du cercle n° 20. Les coordonnées tangentielles sont

$$X_0=\frac{b}{\sin e},\quad r_0=-b\cot e.$$

La courbe polaire auxiliaire est $y^4+x^2y^2-b^2x^2=0$.

2°
$$m=1;\quad \frac{ds_1}{de}=\frac{b}{\sin e},\quad s_1=b\log\tang\frac{e}{2}.$$

Les coordonnées rectangulaires sont :

$$x_1=b(1+\log\sin e),\quad y_1=b\left(e-\frac{\pi}{2}\right).$$

Les coordonnées tangentielles

$$X_1 = b(1 + \log \sin e) - b\left(e - \frac{\pi}{2}\right)\cot e, \quad r_1 = \frac{b\left(e - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin e}.$$

On déduit des formules précédentes les relations suivantes :

$$\cos\frac{y_1}{b} = a^{\frac{x_1 - b}{b}}, \quad 2a^{-\left(\frac{x_1 - b}{b}\right)} = e^{\frac{s_1}{b}} + e^{-\frac{s_1}{b}},$$

dans lesquelles a représente la base des logarithmes. La première est l'équation de la courbe entre les coordonnées rectangles x_1, y_1; la seconde est l'équation de la courbe rapportée à l'arc et à l'abscisse.

L'équation polaire des rayons égaux et parallèles est

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{b}\right).$$

3° $$m = 2; \quad \frac{ds_2}{de} = \frac{b}{\sin^2 e}, \quad s_2 = -b\cot e;$$

$$x_2 = -\frac{b}{\sin e}, \quad y_2 = b\operatorname{tang}\frac{e}{2};$$

$$X_2 = -\frac{b}{\sin e} + b\cot e\log\operatorname{tang}\frac{e}{2}, \quad r_2 = \frac{b\log\operatorname{tang}\frac{e}{2}}{\sin e}.$$

On déduit de ces équations

$$-x_2 = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y_2}{b}} + e^{-\frac{y_2}{b}}\right),$$

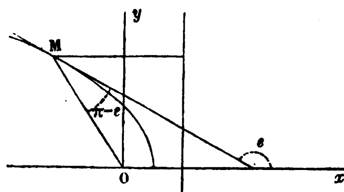
qui est l'équation de la chaînette entre les coordonnées rectangles.

L'équation polaire des rayons égaux et parallèles est

$$y \cdot a^{\frac{y}{b}} = -x \pm \sqrt{x^2 + 2y^2}.$$

4° $m=3$ (*fig.* 7); $\frac{ds_3}{de}=\frac{b}{\sin^4 e}$, $s_3=-\frac{b}{2}\left(\frac{\cos e}{\sin^2 e}-\log\operatorname{tang}\frac{e}{2}\right)$;

Fig. 7.



$$x_3=-\frac{b}{2\sin^2 e},\qquad y_3=-b\cot e;$$

$$X_3=-\frac{b}{2}\left(1-\cot^2 e\right),\qquad r_3=-b\frac{\cos e}{\sin^2 e};$$

de ces équations on déduit l'équation de la courbe rapportée à ses coordonnées rectangles

$$y_3=-2b\left(x_3+\frac{b}{2}\right);$$

elle représente une parabole.

La courbe polaire des rayons égaux et parallèles est encore une parabole dont l'équation est

$$y^2=-bx.$$

Il serait facile de vérifier les différentes analogies (n° 23) qui existent entre ces courbes et les courbes polaires correspondantes des rayons égaux et parallèles.

Lorsque m est négatif, l'équation élémentaire relative au problème précédent devient

$$\frac{ds_m}{de}=b\sin^m e;$$

elle correspond à un nouveau problème qui se traite d'une manière analogue à celle que l'on a employée; elle conduit aussi à quelques résultats intéressants.

30. **Problème VI.** — *Trouver la courbe telle, que son rayon de courbure soit proportionnel au cube de la normale terminée à une droite fixe.*

Prenons cette droite pour axe de X; soit $\mathcal{N}$ la normale, $\mathcal{R}$ le rayon de courbure, m un nombre constant; on a, d'après l'énoncé du problème,

$$\mathcal{R} = m\mathcal{N}^3.$$

Nous avons précédemment trouvé les deux relations

$$\mathcal{N} = -r\operatorname{tang} e, \quad \mathcal{R} = \frac{d(r\sin e)}{\sin e\, de};$$

en ayant égard à ces valeurs, la relation précédente devient

$$-m\frac{\sin e\, de}{\cos^3 e} = \frac{d(r\sin e)}{r^3\sin^3 e}.$$

Cette équation, dont les deux membres sont des différentielles exactes, s'intègre directement, et l'on trouve, en représentant par l la constante introduite par l'intégration, l'équation suivante

$$\frac{1}{r^2\sin^2 e} = \frac{m}{\cos^2 e} - l.$$

Si l'on pose

$$m = \frac{a^2}{b^4}, \quad l = \frac{a^2 - b^2}{b^4},$$

cette équation devient

$$r\sin e = -\frac{b^2\cos e}{\sqrt{a^2\sin^2 e + b^2\cos^2 e}};$$

portons cette valeur de r dans la deuxième équation (12) du n° 22 et intégrons l'équation résultante, nous trouvons

$$X\sin e = \sqrt{a^2\sin^2 e + b^2\cos^2 e}.$$

Le radical représente la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente. Soit D cette perpendiculaire; en portant les valeurs de r et de X dans les expressions du rayon de courbure $\mathfrak{R}$ et des coordonnées rectangles x et y, on trouve les relations

$$\mathfrak{R} = \frac{a^2 b^2}{D^3}, \quad \frac{x}{a} = \frac{a \sin e}{D}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{b \cos e}{D}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Il serait facile de déduire des formules que nous venons de trouver les propriétés de la tangente et du rayon de courbure de la ligne qui est une conique.

31. *Propriétés du rayon de courbure.* — Contentons-nous de signaler quelques propriétés du rayon de courbure; rapportons la courbe à ses coordonnées polaires ρ et θ, nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2};$$

or l'équation du rayon de courbure peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{(ab\mathfrak{R})^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos^2 e}{a^2} + \frac{\sin^2 e}{b^2};$$

il résulte de là que, si a' est le demi-diamètre parallèle à la tangente à la courbe au point où le rayon de courbure est $\mathfrak{R}$, on aura les deux relations

$$a' = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \mathfrak{R}^{\frac{1}{3}}, \quad a' = \frac{a}{b}\,\mathfrak{N};$$

on déduit de là les deux propositions suivantes :

1° *Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au cube du diamètre parallèle à la tangente en ce point.*

2° *La normale en un point est proportionnelle au demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point.*

Il résulte de là que *toute relation homogène entre divers demi-diamètres d'une conique existera aussi entre les racines*

cubiques des rayons de courbure des points déterminés par les tangentes parallèles à ces diamètres, et qu'elle existera aussi pour les normales aux mêmes points.

D'après cela, soient R_1, R_2 les rayons de courbure de la conique aux extrémités des deux demi-axes, on aura l'équation

$$\frac{1}{\mathcal{R}^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos^2 e}{R_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sin^2 e}{R_1^{\frac{2}{3}}};$$

de même, soient $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ les rayons de courbure aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués, formant entre eux l'angle α, on a

$$\mathcal{R}_1^{\frac{1}{3}}\mathcal{R}_2^{\frac{1}{3}}\sin\alpha = R_1^{\frac{1}{3}}R_2^{\frac{1}{3}}, \qquad \mathcal{R}_1^{\frac{2}{3}} + \mathcal{R}_2^{\frac{2}{3}} = R_1^{\frac{2}{3}} + R_2^{\frac{2}{3}}.$$

La première de ces deux dernières relations indique que, si l'on projette les rayons de courbure aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués, d'une conique sur ces diamètres, le parallélogramme, dont deux côtés contigus sont égaux et parallèles à ces projections, est constant.

Soit b' le diamètre conjugué de a'; si, dans l'expression

$$a'^3 = ab\mathcal{R},$$

on remplace ab par $a'b'\sin\alpha$, on aura la relation connue

$$\mathcal{R} = \frac{a'^2}{b'\sin\alpha},$$

qui exprime le théorème suivant :

Le rayon de courbure en un point est une troisième proportionnelle entre le demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point et la distance de ce point à ce diamètre.

§ IV. — Passage d'un système de coordonnées tangentielles à un autre système de coordonnées tangentielles.

32. Problème VII. — *Connaissant les coordonnées* e, X, r *que la tangente à la courbe* $\frac{ds}{de}$ *détermine sur un axe* OX, *trou-*

ver les coordonnées e_1, X_1, r_1, que la même tangente détermine sur un axe O_1X_1 formant un angle α avec le premier.

Soient O, O_1 les origines à partir desquelles les X et les X_1 sont comptées, I l'intersection des deux axes, de telle sorte que OI égale m, et O_1I égale m_1; A, A_1 les intersections de la tangente à la courbe avec l'axe des X et l'axe des X_1. Le triangle IAA_1 donne les relations

$$(19) \qquad e = e_1 - \alpha, \quad \frac{X - m}{\sin e_1} = \frac{X_1 - m_1}{\sin e} = \frac{r_1 - r}{\sin\alpha},$$

desquelles on déduit

$$(20) \quad X_1 = m_1 + \frac{\sin(e_1 - \alpha)}{\sin e_1}(X - m), \quad r_1 = r + \frac{\sin\alpha}{\sin e_1}(X - m);$$

dans ces formules, X et r, qui sont des fonctions de e, sont exprimées en fonction de e_1 au moyen de la première des relations (19).

Si l'angle α est droit, et si, de plus, on suppose l'origine des X et des X_1 placée au point I d'intersection des deux axes, les formules précédentes deviennent

$$(20') \qquad X_1 = -X\cot e_1, \quad r_1 = r + \frac{X}{\sin e_1}.$$

33. *Du segment intercepté par les deux axes sur la normale à la courbe.*

Soient N, N_1 les portions de normale terminées à l'axe des X et des X_1, on a

$$N_1 - N = r_1 \operatorname{tang} e_1 - r \operatorname{tang} e;$$

éliminant r au moyen de la dernière des équations (19), on trouvera

$$N_1 - N = \frac{\sin\alpha}{\cos e \cos e_1}[r_1 + (X_1 - m_1)\cos e_1];$$

si l'on élimine r_1 au moyen de la relation (12), $r_1 de_1 = \sin e_1 dX_1$.

on obtient finalement les trois expressions du segment ($N_1 - N$).

$$(21)\quad \begin{cases} N_1 - N = \dfrac{\sin\alpha}{\cos e \cos e_1}\,\dfrac{d[(X_1 - m_1)\sin e_1]}{de_1} \\ \quad = \dfrac{\sin\alpha}{\cos e \cos e_1}\,\dfrac{d[(X - m)\sin e]}{de} \\ \quad = \dfrac{d[(r_1 - r)\sin e \sin e_1]}{\cos e \cos e_1\, de}. \end{cases}$$

Si les axes sont rectangulaires, ces formules deviennent

$$(21')\quad \begin{cases} N_1 - N = \dfrac{d[(X_1 - m_1)\sin e_1]}{\cos e_1 \sin e_1\, de_1} = -\dfrac{d[(X - m)\sin e]}{\cos e \sin e\, de} \\ \quad = -\dfrac{d[(r_1 - r)\sin e_1 \cos e_1]}{\cos e_1 \sin e_1\, de_1}. \end{cases}$$

Il faut remarquer un résultat auquel conduit cette dernière expression. Soit $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure de la courbe dont les deux coordonnées tangentielles (rayon tangent, et son inclinaison sur l'axe O_1X_1) seraient $2(r_1 - r)$, $2e_1$, l'on aura d'après les formules (12)

$$\mathfrak{R} = -\frac{d[2(r_1 - r)\sin 2e_1]}{\sin 2e_1\, d.2e_1} = (N_1 - N).$$

Le rayon de courbure de cette courbe serait, en longueur, égal au segment intercepté par les deux axes rectangulaires sur la normale à la courbe primitive, dont les coordonnées tangentielles seraient r_1, e_1 par rapport à l'axe O_1X_1.

34. *De la forme la plus générale de l'équation élémentaire d'une courbe* $\dfrac{ds}{de} = \varphi(e)$.

La position de l'axe auquel est rapportée l'équation élémentaire d'une courbe influe nécessairement sur la forme de cette équation, et peut lui donner une certaine simplicité. Si l'on veut avoir la forme la plus générale de cette équation, quand cette équation est connue pour une position particulière de l'axe, il suffit de la rapporter à un nouvel axe quelconque, for-

mant un angle indéterminé α avec le premier. Ainsi l'équation élémentaire d'une courbe par rapport à un axe donné OX, étant $\frac{ds}{de} = \varphi(e)$, l'équation élémentaire la plus générale deviendra $\frac{ds}{de_1} = \varphi(\alpha + e_1)$.

D'après cela, l'équation élémentaire d'une cycloïde, rapportée à une parallèle à la tangente au sommet est (n° 24),

$$\frac{ds}{de} = 4a\cos e,$$

a étant le rayon du cercle générateur; l'équation élémentaire la plus générale de la cycloïde sera :

$$\frac{ds}{de_1} = 4a\cos(e_1 + \alpha).$$

De même l'équation élémentaire la plus générale de la parabole sera (n° 29)

$$\frac{ds}{de_1} = \frac{p}{\sin^3(e_1 + \alpha)}.$$

35. Problème VIII. — *Le rapport des vitesses des points d'intersection d'une droite mobile avec deux droites fixes* OX, OX_1 *est constant. Trouver le rayon de courbure et toutes les lignes qui caractérisent l'enveloppe de cette droite mobile.*

Soit $\frac{dX_1}{dX} = a$ le rapport des vitesses, l'axe OX_1 étant situé au-dessus de l'axe OX; on déduit de cette équation l'équation suivante, dans laquelle b est la constante introduite par l'intégration

$$X_1 = aX + b;$$

si l'on élimine X_1 entre cette équation et la deuxième des équations (19), dans laquelle m, m_1 sont supposées nulles, on trouve les relations

$$X = \frac{b\sin(e-\alpha)}{\sin e - a\sin(e-\alpha)}, \quad \frac{dX}{de} = \frac{b\sin\alpha}{[\sin e - a\sin(e-\alpha)]^2}.$$

Si l'on remplace cette valeur de $\frac{dX}{de}$ dans la deuxième équation (12), on trouve l'expression

$$r = \frac{b \sin\alpha \sin e}{[\sin e - a \sin(e-\alpha)]^2}.$$

En portant cette valeur de r dans la troisième équation (12), on obtient, réductions faites, l'équation

$$\frac{ds}{de} = -\frac{2ab\sin^2\alpha}{[\sin e - a\sin(e-\alpha)]^3}.$$

Après avoir développé $\sin(e-\alpha)$, posons

$$\frac{a\sin\alpha}{1 - a\cos\alpha} = \operatorname{tang}\beta,$$

β étant un auxiliaire; on aura

$$\frac{ds}{de} = -\frac{2ab\sin^2\alpha}{\sin^3(e+\beta)} \times (1 + a^2 - 2a\cos\alpha)^{-\frac{3}{2}}.$$

Cette équation est l'équation élémentaire de la parabole (nº 29); elle donne la valeur du rayon de courbure en un point quelconque, et les valeurs de X et de r sont les coordonnées tangentielles de cette courbe par rapport à l'axe OX.

36. Problème IX. — *Trouver la tangente et le rayon de courbure de l'enveloppe de la droite qui intercepte sur deux axes* OX, OX_1, *deux segments* X, X_1 *liés par la relation*

$$\frac{A^2}{X^2} + \frac{B^2}{XX_1} + \frac{C^2}{X_1^2} + \frac{D}{X} + \frac{E}{X_1} - 1 = 0,$$

dans laquelle les numérateurs sont des constantes.

Nous conservons la même notation que dans le numéro précédent. Éliminons X_1 de cette équation, au moyen de la seconde des équations (19), nous obtiendrons

$$X^2\sin^2 e - X\sin e(D\sin e + E\sin e_1) \\ - (A^2\sin^2 e + B^2\sin e\sin e_1 + C^2\sin^2 e_1) = 0;$$

pour abréger, posons

$$(D^2+4A^2)=l^2,\quad DE+2B^2=m^2,\quad E^2+4C^2=n^2,\quad \frac{\sin e_1}{\sin e}=z,$$
$$\mathfrak{R}=\sqrt{l^2+2m^2z+n^2z^2};$$

la résolution de l'équation précédente donnera la relation

$$2X=(D+Ez)\pm\mathfrak{R}.$$

Si l'on remarque que $\frac{dz}{de}=\frac{\sin\alpha}{\sin^2 e}$, la dérivée de l'équation précédente sera

$$2\frac{dX}{de}=\frac{\sin\alpha}{\sin^2 e}\left(E\pm\frac{m^2+n^2z}{\mathfrak{R}}\right);$$

or la troisième formule (12) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{ds}{de}=\frac{d\left(\sin^2 e\frac{dX}{de}\right)}{\sin e};$$

par suite, après avoir substitué la valeur de $\frac{dX}{de}$ dans cette équation, on obtient la relation

$$2\frac{ds}{de}\sin e=\pm\sin\alpha\,\frac{d}{de}\left(\frac{m^2+n^2z}{R}\right),$$

et finalement

$$2\frac{ds}{de}=\pm\frac{\sin^2\alpha\,(n^2l^2-m^4)}{(l^2\sin^2 e+2m^2\sin e_1+n^2\sin^2 e_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette équation donne l'expression du double du rayon de courbure, et l'on reconnaît que l'enveloppe cherchée n'est autre chose qu'une conique (n° 30).

Quant au rayon tangentiel r, on l'obtient en multipliant la valeur de $\frac{dX}{de}$ par $\sin e$.

Si l'on suppose que B, D, E sont nuls, r_1 étant la tangente terminée à l'axe OX_1, on obtient les relations suivantes :

$$r = \frac{C^2 \dfrac{\sin\alpha \sin e_1}{\sin^2 e}}{\sqrt{A^2 \sin^2 e + C^2 \sin^2 e_1}}, \quad r_1 = \frac{\dfrac{A^2 \sin\alpha \sin e}{\sin e_1}}{\sqrt{A^2 \sin^2 e + C^2 \sin^2 e_1}},$$

$$\frac{ds}{de} = \frac{A^2 C^2 \sin^2\alpha}{(A^2 \sin^2 e + C^2 \sin^2 e_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

On déduit de ces équations

$$r r_1 = + \frac{A^2 C^2 \sin^2\alpha}{(A^2 \sin^2 e + C^2 \sin^2 e_1)},$$

$$r + r_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin e \sin e_1} \sqrt{A^2 \sin^2 e + C^2 \sin^2 e_1}, \quad R^2 = \frac{r^3 r_1^3}{A^2 C^2 \sin^2\alpha}.$$

Ainsi le cube de la moyenne proportionnelle des deux tangentes r, r_1 est dans un rapport constant avec le rayon de courbure.

Si la relation entre les segments X, X_1 se réduit à l'équation $B^2 = XX_1$, on trouvera

$$2r = B \frac{\sin\alpha}{\sin e} \sqrt{\frac{\sin e_1}{\sin e}},$$

$$2r_1 = B \frac{\sin\alpha}{\sin e_1} \sqrt{\frac{\sin e}{\sin e_1}},$$

$$4R = \frac{\sin^3\alpha}{B^3} \frac{1}{\sin^{\frac{3}{2}} e \sin^{\frac{3}{2}} e_1}.$$

§ V. — Des courbes dérivées.

Nous comprenons sous le nom de courbes dérivées d'une courbe donnée celles qui dérivent de cette dernière d'après une loi donnée.

37. *Des courbes semblables.* — Les courbes semblables et

semblablement placées sont celles dont les rayons de courbure parallèles sont proportionnels.

Conditions de similitude relatives aux coordonnées tangentielles de deux courbes semblables et semblablement placées. — Soient s, r, X les coordonnées tangentielles d'une courbe; s_1, r_1, X_1 les lignes correspondantes de la courbe semblable et semblablement placée; soit OX l'axe commun auquel elles sont rapportées; la condition donnée par la définition même de ces courbes est

$$\frac{ds_1}{de} = m\frac{ds}{de};$$

m est un nombre constant. Si l'on a égard aux équations (12), la relation précédente devient

$$d(r_1 \sin e) = md(r \sin e);$$

si l'on intègre et qu'on représente par y_0 la constante introduite par l'intégration, on trouve l'équation

$$(r_1 - mr)\sin e = y_0,$$

or cette équation, quand on y remplace r et r_1 par leurs valeurs (12), devient

$$d(X_1 - mX) = \frac{y_0 de}{\sin^2 e}.$$

De celle-ci l'on déduit, x_0 étant la constante introduite par l'intégration,

$$X_1 - mX = \frac{x_0 \sin e - y_0 \cos e}{\sin e}.$$

Telles sont les formules qui donnent les coordonnées tangentielles X_1, r_1 en fonction des coordonnées X et r.

Conditions de similitude relatives aux coordonnées rectangles. — En faisant usage des formules [4'], on trouve les relations

$$y_1 - my = y_0, \quad x_1 - mx = x_0.$$

De l'équation proposée l'on déduit $s_1 = ms + s_0$, s_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Ces équations donnent les proportions

$$m = \frac{y_1 - y_0}{y} = \frac{x_1 - x_0}{x} = \frac{s_1 - s_0}{s}.$$

Aires balayées par les rayons de courbure correspondants. — Soient dv_1, dv les deux aires élémentaires correspondantes, on aura

$$v_1 = m^2 v + v_0,$$

v_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Aires balayées par les rayons tangentiels r, r_1. — Soient du_1, du les deux aires correspondantes, on aura

$$du_1 = \frac{1}{2}\left(mr + \frac{y_0}{\sin e}\right)^2 de.$$

Développant et simplifiant, on obtient l'équation

$$du_1 = m^2 du + \frac{1}{2}\frac{y_0^2}{\sin^2 e} de + \frac{m y_0 r de}{\sin e};$$

remplaçant dans le dernier terme r par sa valeur $\frac{dX}{de}\sin e$ et intégrant, on trouve la relation

$$u_1 - m^2 u = -\frac{1}{2} y_0^2 \cot e + m y_0 X + u_0,$$

u_0 étant la constante introduite par l'intégration.

Ces formules montrent comment on obtiendra, au moyen de l'une des deux courbes, toutes les grandeurs qui caractérisent l'autre courbe.

38. *Des courbes parallèles.* — Deux courbes sont parallèles lorsque leurs rayons de courbure parallèles ne diffèrent que par une constante.

Conditions pour que deux courbes soient parallèles. — Soient s, r, X l'arc et les coordonnées tangentielles de l'une des deux

courbes, s_1, r_1, X_1 les lignes correspondantes de la courbe parallèle ; soit OX l'axe commun auquel ces deux courbes sont rapportées; la condition donnée par la définition même des courbes est

$$\frac{ds_1}{de} = \frac{ds}{de} + n,$$

n étant un nombre constant. Si l'on a égard aux équations (12), cette équation devient

$$d(r_1 \sin e) = d(r \sin e) + n \sin e\, de;$$

si l'on intègre et qu'on représente par y_0 la constante introduite par l'intégration, on aura l'équation

$$(r_1 - r)\sin e = y_0 - n \cos e;$$

or cette équation, quand on y remplace r_1 et r par leurs valeurs (12), devient

$$d(X_1 - X) = \frac{y_0\, de}{\sin^2 e} - \frac{n \cos e\, de}{\sin^2 e};$$

en l'intégrant et en représentant par x_0 la constante arbitraire, on obtient finalement la relation

$$X_1 - X = -\frac{y_0 \cos e}{\sin e} + \frac{n}{\sin e} + x_0.$$

De ces équations on déduit les conditions de parallélisme des courbes qui se rapportent à leurs coordonnées rectangles, qui sont

$$y_1 - y = -n \cos e + y_0, \quad x_1 - x = n \sin e + x_0.$$

Rectification des courbes. — Si l'on intègre l'équation relative aux rayons de courbure, et qu'on représente par s_0 la constante introduite par l'intégration, on trouve

$$s_1 - s = ne + s_0;$$

on déduit de ces équations, les rapports égaux

$$\frac{(s_1 - s_0) - s}{e} = -\frac{(y_1 - y_0) - y}{\cos e} = \frac{(x_1 - x_0) - x}{\sin e}.$$

Aires balayées par les rayons de courbure. — En conservant la notation du n° 37, on a

$$dv_1 = \frac{1}{2}(R + s_0)^2 de = dv + Rs_0 de + \frac{1}{2} s_0^2 de;$$

si l'on appelle v_0 la constante introduite par l'intégration, on obtient l'équation suivante :

$$v_1 - v_0 = v + s_0 s + \frac{1}{2} s_0^2 e.$$

Aires balayées par les rayons tangentiels. — Elles sont données par les formules suivantes :

$$du_1 = \frac{1}{2}\left(r - n\cot e + \frac{y_0}{\sin e}\right)^2 de,$$

$$du_1 = du + \frac{1}{2} n^2 \cot^2 e\, de + \frac{1}{2}\frac{y_0^2\, de}{\sin^2 e} + \frac{y_0\, r\, de}{\sin e}$$
$$- nr\cot e\, de - \frac{n y_0 \cos e\, de}{\sin^2 e}.$$

Or si l'on remarque qu'en vertu des équations (12) on a les relations

$$\frac{r\,de}{\sin e} = dX, \quad \frac{r\cos e\, de}{\sin e} = d(s - r),$$

et que l'intégrale du terme $\frac{1}{2} n^2 \cot^2 e\, de$ est

$$-\frac{n^2}{2}(\cot e + e),$$

on obtient, u_0 étant la constante introduite par l'intégration,

4

l'équation suivante :

$$u_1 - u_0 - u = -\frac{n^2}{2}(\cot e + e) - \frac{y_0^2}{2}\cot e + y_0 X$$
$$- n(s - r) + \frac{n y_0}{\sin e}.$$

39. Problème X. — *Trouver les courbes parallèles d'une conique donnée.*

Si l'on conserve les notations employées dans le n° 30, les coordonnées rectangles de la courbe parallèle à une conique seront données par les équations

$$x_1 - x_0 = \left(n + \frac{a^2}{D}\right)\sin e, \quad y_1 - y_0 = -\left(n + \frac{b^2}{D}\right)\cos e,$$

$$D = \sqrt{a^2\sin^2 e + b^2\cos^2 e}, \quad \frac{ds_1}{de} = \frac{a^2 b^2}{D^3} + n,$$

dans lesquelles e est l'angle que la tangente à la conique fait avec l'axe OX.

Plus généralement, si l'on cherche les courbes parallèles de la courbe

$$\frac{x^m}{a} + \frac{y^m}{b} = 1,$$

et que l'on pose pour abréger, i étant égal à $\sqrt{-1}$,

$$\mathfrak{D} = i^{\frac{2m}{m-1}} a^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{m}{m-1}} e + b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{m}{m-1}} e,$$

on aura les équations

$$x_1 - x_0 = n \sin e + \frac{i^{\frac{2}{m-1}} a^{\frac{1}{m-1}}}{\mathfrak{D}^{\frac{1}{m}}} \sin^{\frac{1}{m-1}} e,$$

$$y_1 - y_0 = -n\cos e + \frac{b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{1}{m-1}} e}{\mathfrak{D}^{\frac{1}{m}}},$$

$$\frac{ds_1}{de} = -i^{\frac{2m}{m-1}} \frac{(ba)^{\frac{1}{m-1}}}{m-1} \frac{\sin^{\frac{2-m}{m-1}} e \cos^{\frac{2-m}{m-1}} e}{\mathfrak{D}^{\frac{1}{m}+1}} + n.$$

Problème XI. — *Enveloppe d'une droite de longueur l dont les extrémités se meuvent sur deux droites données* OX, OX_1.

Soit a l'angle des deux droites OX, OX_1; e, e_1 les angles qu'elles forment avec la droite l; X, X_1 les distances des points d'intersection au point O; le triangle dont les côtés sont X, X_1, l donne les rapports égaux :

$$\frac{X}{\sin e_1} = \frac{X_1}{\sin e} = \frac{l}{\sin a}.$$

On déduit de ces relations les équations suivantes :

$$X = \frac{l}{\sin a}\sin(e-a), \quad \frac{dX}{de} = \frac{l}{\sin a}\cos(e-a).$$

Or, si l'on prend OX pour axe des coordonnées tangentielles de la courbe cherchée, on aura, d'après les formules (12), les relations

$$r = \frac{l}{2\sin a}[\sin(2e-a)+\sin a],$$

$$\frac{ds}{de} = \frac{l}{2\sin a}[3\cos(2e-a)+\cos a].$$

Ces valeurs font connaître les coordonnées tangentielles de la courbe et son rayon de courbure.

Discutons la valeur de $\frac{ds}{de}$ que fournit l'équation naturelle de la courbe. Si cette valeur se réduisait au premier terme, on aurait l'équation élémentaire d'une hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon égal à $\frac{1}{4}\frac{l}{\sin a}$ roulant sur la concavité d'un cercle de rayon $\frac{l}{2\sin a}$, cette hypocycloïde ayant son sommet sur la bissectrice de l'angle des deux axes OX, OX_1; mais, comme la valeur de $\frac{ds}{de}$ se compose de ce premier terme augmenté du terme constant $\frac{l}{2}\frac{\cos a}{\sin a}$, elle représente l'équa-

tion élémentaire d'une courbe parallèle à l'hypocycloïde que nous venons de définir et situé à une distance $\frac{l\cos a}{2\sin a}$ de cette courbe; on déduit de là la construction suivante :

Pour construire l'enveloppe de la courbe l dont les extrémités glissent sur deux axes OX, OX_1 *formant entre eux l'angle a, élevez par les extrémités de la droite l considérée dans une de ses positions des perpendiculaires aux axes; avec un rayon égal à la distance de leur point d'intersection au point* O, *décrivez de ce point un cercle et sur la concavité de ce cercle une hypocycloïde, dont le sommet se trouve sur la bissectrice des axes à une distance du centre égale à la moitié du rayon; enfin construisez la courbe parallèle de l'hypocycloïde à une distance de celle-ci égale à la projection de la distance du centre au sommet de l'hypocycloïde sur l'un des axes.*

Si l'on prend la dérivée de $\frac{ds}{de}$, on aura

$$\frac{d^2 s}{de^2} = R' = -\frac{3l}{\sin a}\sin(2e - a),$$

qui est l'équation élémentaire d'une autre hypocycloïde engendrée par un cercle d'un rayon égal à $\frac{l}{2\sin a}$ roulant sur la concavité d'un cercle d'un rayon quatre fois plus grand, l'origine de cette hypocycloïde étant sur la bissectrice de l'angle des axes OX, OX_1. Ainsi l'enveloppe de la droite l est la développante de cette dernière hypocycloïde.

Ces caractères si simples de l'enveloppe qui nous occupe sont la conséquence immédiate de notre analyse. Il eût été beaucoup moins facile de les apercevoir si l'on avait fait usage du système cartésien. Les équations de la courbe dans ce système se présenteraient sous une forme compliquée. L'analyse précédente les fournit d'ailleurs sans aucune difficulté, comme on va le voir.

Coordonnées rectangulaires. — Elles se déduisent des coordonnées tangentielles que nous avons déjà trouvées, ou bien

elles s'obtiennent directement au moyen des formules [4']. Elles sont :

$$(x-x_0)\sin a = -l(\cos a \sin^3 e + \sin a \cos^3 e) + 2l\cos a \sin e,$$
$$(y-y_0)\sin a = l(\sin a \sin^3 e - \cos a \cos^3 e) + l\cos a \cos e.$$

Si $a = \frac{\pi}{2}$,

$$x - x_0 = -l\cos^3 e, \quad y - y_0 = l\sin^3 e,$$

desquelles on déduit

$$(x-x_0)^{\frac{2}{3}} + (y-y_0)^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Rectification. — Si l'on intègre la valeur de $\frac{ds}{de}$, on aura l'arc sous l'une des deux formes

$$s = \frac{3l}{2\sin a}\sin e \cos e_1 + \frac{le\cot a}{2} = \frac{3}{2}r + \frac{le}{2}\cot a,$$

la constante étant déterminée par la condition que s s'annule avec e.

Quadrature. — On trouve de la même manière l'aire u balayée par le rayon vecteur depuis $e = 0$ jusqu'à $e = e$:

$$\begin{aligned} 2u = {} & \frac{\sin 2a}{4}\sin^4 e + \frac{\cos 2a}{4}\cos e \sin^3 e \\ & + \left(\frac{3\cos 2a}{6} - \frac{\cos^2 a}{2}\right)\cos e \sin e \\ & + \frac{1}{2}\left(\cos^2 a - \frac{3}{4}\cos 2a\right) e. \end{aligned}$$

Nous donnerons bientôt une construction générale très-simple des rayons de courbure des épicycloïdes.

40. *Des courbes résultantes.* — Une courbe est la ***résultante*** de deux courbes données, lorsque, les rayons de courbure de ces courbes étant parallèles, le rayon de la première est la

somme des rayons de courbure des deux autres courbes. Celles-ci sont dites les *composantes* de la première.

Relations entre les arcs et les coordonnées d'une courbe et de ses composantes. — Soient s, r, X; s_1, r_1, X_1 les arcs et les coordonnées tangentielles des deux courbes composantes; s_2, r_2, X_2 l'arc et les coordonnées tangentielles de la courbe résultante. La condition donnée par la définition de la courbe résultante est

$$\frac{ds_2}{de} = \frac{ds}{de} + \frac{ds}{de};$$

or, si l'on a égard aux équations (12), on trouve la relation

$$d(r_2 \sin e) = d(r_1 \sin e) + d(r \sin e).$$

Si l'on représente par y_0 la constante introduite par l'intégration, on trouve également la relation

$$(r_2 - r_1 - r) = \frac{y_0}{\sin e}.$$

Cette équation, quand on a égard aux équations (12), devient

$$d(X_2 - X_1 - X) = \frac{y_0 \, de}{\sin^2 e};$$

en intégrant cette équation et en représentant par x_0 la constante de l'intégration, on obtient finalement l'équation

$$X_2 - X_1 - X - x_0 = -y_0 \cot e.$$

De ces équations, on déduit les coordonnées rectangulaires de la nouvelle courbe en fonction des coordonnées rectangulaires des courbes données :

$$y_2 - y_1 - y = y_0, \quad x_2 - x_1 - x = x_0.$$

Rectification des courbes. — Si l'on intègre l'équation relative aux rayons de courbure, et qu'on appelle s_0 la constante introduite par l'intégration, on trouve la relation

$$s_2 - s_1 - s = s_0.$$

Aires balayées par les rayons de courbure. — Elles sont données par les relations

$$dv_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds_1}{de} + \frac{ds}{de}\right)^2 de = dv_1 + dv + \mathrm{RR}_1 de.$$

Or, si l'on appelle w l'aire balayée par la moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure R, R_1, comptée à partir du centre de courbure de l'une des trois courbes dans la direction commune aux rayons de courbure, et si l'on représente par v_0 la constante introduite par l'intégration, on aura la relation

$$v_2 - v_1 - v - v_0 = 2w.$$

Aires balayées par les rayons tangentiels. — Soit m l'aire balayée par une moyenne proportionnelle aux rayons r_1, r, comptée à partir d'un point pris sur l'une des courbes composantes dans la direction des rayons tangentiels, on aura, en raisonnant comme ci-dessus, l'équation suivante, dans laquelle u_0 est une constante d'intégration,

$$u_2 - u_1 - u - u_0 = 2m + 2y_0\left(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X} - \frac{y_0}{4}\cot e\right).$$

41. Problème XII. — *Trouver la courbe résultante de la chatnette et de la parabole.*

Les équations élémentaires de la chaînette et de la parabole sont, d'après le n° 29,

$$\frac{ds}{de} = \frac{b}{\sin^2 e}, \quad \frac{ds_1}{de} = \frac{b}{\sin^3 e}.$$

Donc l'équation élémentaire de la courbe résultante sera

$$\frac{ds_2}{de} = \frac{b}{\sin^2 e}\left(1 + \frac{1}{\sin e}\right);$$

donc, d'après le même numéro, les coordonnées rectangulaires de la courbe résultante, en ayant égard soit aux formules [4'], soit aux formules du numéro précédent, seront

données par les deux équations suivantes :

$$x_2 = -\frac{1}{\sin e}\left(1+\frac{1}{2\sin e}\right), \quad y_2 = b\left(\frac{1-2\cos e}{\sin e}\right).$$

L'élimination de e entre ces deux équations conduit à l'équation cartésienne de la courbe résultante; cette équation est la suivante :

$$y_2 = b\left(\frac{x_2 - 2\sqrt{x_2^2 + 2bx_2 - 2b^2 \pm 2b\sqrt{b^2-2bx_2}}}{b \pm \sqrt{b^2-2bx_2}}\right).$$

La rectification de la courbe est donnée par la formule suivante :

$$s_2 = -b\left(\cot e + \frac{1}{2}\frac{\cos e}{\sin^2 e} - \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\frac{e}{2}\right) + s_0.$$

42. *Des développées.* — Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la *développée* de cette courbe.

Relations fondamentales. — Soient ds et $ds + dds$ deux éléments successifs d'une courbe; R, $R + dR$ les deux rayons de courbure correspondants, et ds_1 l'élément de la développée : on a un quadrilatère dont deux côtés sont les deux demi-éléments de la courbe proposée, et les deux autres, $R + ds_1$, $R + dR$, si les rayons de courbure vont en augmentant, ou bien R, $R + dR + ds_1$ si les rayons de courbure vont en diminuant. Suivant que l'on projettera le périmètre de ce quadrilatère sur la direction d'un rayon de courbure ou sur une direction perpendiculaire à ce rayon, on aura les deux équations :

$$dR = \pm ds_1, \quad R\,de = ds.$$

Le signe supérieur se rapporte au cas où le rayon de courbure augmente avec l'axe s, et le signe inférieur, au cas où ce rayon diminue lorsque l'arc s augmente.

La première équation s'intègre, et, si l'on appelle s'_0, R_0 deux valeurs correspondantes de s_1 et de R, on obtient la relation

$$R - R_0 = \pm(s_1 - s'_0);$$

donc *l'arc de développée compris entre deux positions du rayon de courbure est égal à la différence de ces rayons.*

Si l'on suppose un fil flexible et inextensible, sans épaisseur, ayant une de ses extrémités en un point quelconque de la courbe donnée, et que l'on tende ce fil en l'enroulant sur la développée, il suffirait de développer ce fil à partir de l'extrémité située sur la courbe donnée pour que cette extrémité décrivît cette courbe; tout point différent de cette extrémité décrirait une courbe parallèle de la courbe donnée. La courbe proposée et ses parallèles sont les développantes de la courbe dite *développée.*

Équation élémentaire de la développée. — Soit $\frac{ds}{de} = \varphi(e)$ l'équation élémentaire de la courbe proposée; d'après les relations que nous venons d'établir, on a l'équation

$$ds_1 = \pm dR = \pm d\left(\frac{ds}{de}\right);$$

or l'angle que le rayon de courbure R fait avec l'axe OX étant e_1, on a

$$e_1 = e + \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{ds_1}{de_1} = \pm \frac{dR}{de} = \pm \frac{d^2s}{de^2} = \varphi'\left(e_1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Coordonnées tangentielles. — Soient X_1, r_1 ces coordonnées également prises par rapport à l'axe OX, auquel la courbe proposée est rapportée, on aura

$$X_1 = X + \frac{r}{\cos e}, \quad r_1 = R + r \tang e;$$

or, si l'on a égard aux équations (12), on obtiendra les relations

$$X_1 = \frac{d(X \sin e)}{\cos e \, de}, \quad r_1 = \frac{d(r \tang e)}{\tang e \, de}.$$

Si l'on remplace dans ces équations X et r par leurs valeurs données par les équations (6) et (7), on aura, réductions faites, les équations

$$X_1 = \int \left(\frac{1}{\cos^2 e} \int \frac{d^2 s}{de^2} \cos e \, de \right) de, \quad r_1 = \frac{1}{\cos e} \int \frac{d^2 s}{de^2} \cos e \, de.$$

On peut les obtenir directement en portant la valeur de $\frac{ds_1}{de_1}$ tirée de l'équation élémentaire de la développée dans les formules (6″) et (7″), et en prenant e pour variable indépendante.

Coordonnées rectangles. — Soient x_1, y_1 les coordonnées de la développée, x, y les coordonnées correspondantes de la courbe proposée, on a les équations

$$x - x_1 = \frac{ds}{de} \sin e, \quad y - y_1 = -\frac{ds}{de} \cos e.$$

Si l'on remplace dans ces équations x et y par leurs valeurs tirées des équations [4′], on obtient, après réductions, les deux équations

$$x_1 - x_0 = -\int \frac{d^2 s}{de^2} \sin e \, de, \quad y_1 - y_0 = \int \frac{d^2 s}{de^2} \cos e \, de.$$

En opérant comme précédemment, on peut obtenir ces deux équations directement en partant de l'équation élémentaire de la développée et en faisant usage des formules [4′].

43. *Applications des formules précédentes.* — 1° *Développée de la strophoïde.* L'équation de cette courbe est en coordonnées rectangles

$$\frac{x^m}{a} + \frac{y^m}{b} = 1.$$

Si l'on fait usage des notations employées dans le n° 39, on aura l'équation naturelle de la courbe

$$\frac{ds}{de} = -\, i^{\frac{2m}{m-1}} \frac{(ba)^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{2-m}{m-1}} e \cos^{\frac{2-m}{m-1}} e}{(m-1)\,\Phi^{\frac{1}{m}+1}};$$

d'après cela, les équations de la développée de la strophoïde en coordonnées rectangles seront :

$$x_1 - x_0 = a^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{1}{m-1}} e$$

$$\times \frac{b^{\frac{1}{m-1}} i^{\frac{2m}{m-1}} [(m-1)\cos^2 e - 1] \cos^{\frac{2-m}{m-1}} e + (m-1) a^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{m}{m-1}} e}{\left(i^{\frac{2m}{m-1}} b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{1}{m-1}} e + a^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{m}{m-1}} e\right)^{\frac{1}{m}+1}},$$

$$y_1 - y_0 = b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{1}{m-1}} e$$

$$\times \frac{a^{\frac{1}{m-1}} i^{\frac{2m}{m-1}} [(m-1)\sin^2 e - 1] \sin^{\frac{2-m}{m-1}} e + (m-1) b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{m}{m-1}} e}{\left(i^{\frac{2m}{m-1}} a^{\frac{1}{m-1}} \sin^{\frac{m}{m-1}} e + b^{\frac{1}{m-1}} \cos^{\frac{m}{m-1}} e\right)^{\frac{1}{m}+1}}.$$

Dans le cas où m égale 2, ces formules deviennent

$$(x_1 - x_0) a^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}(a-b)\sin^3 e}{(b\cos^2 e + a\sin^2 e)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(y_1 - y_0) b^{\frac{1}{2}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}(b-a)\cos^3 e}{(b\cos^2 e + a\sin^2 e)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on élève à la puissance $\frac{2}{3}$ les deux équations, et qu'on ajoute membre à membre, on obtient

$$a^{\frac{1}{3}}(x_1 - x_0)^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}(y_1 - y_0)^{\frac{2}{3}} = (a-b)^{\frac{2}{3}},$$

qui est l'équation de la développée d'une conique en coordonnées rectangles.

2° *Développée du cercle.* — L'équation du cercle est

$$\frac{ds}{de} = a,$$

a étant le rayon du cercle; donc l'équation naturelle de la

développée sera

$$\frac{ds_1}{de_1} = 0,$$

c'est-à-dire un cercle de rayon nul, et, par conséquent, cette développée se réduit au centre du cercle proposé.

3° *Développée de la spirale logarithmique.* — L'équation naturelle de la spirale logarithmique est (n° 29),

$$\frac{ds}{de} = m\mathrm{E}^{ne};$$

l'équation naturelle de sa développée sera

$$\frac{ds}{de_1} = nm\mathrm{E}^{n\left(e_1 - \frac{\pi}{2}\right)};$$

la développée sera donc une spirale logarithmique. Si l'on rapporte ces deux équations à une même variable e, on verra qu'en des points correspondants le rayon de courbure de la spirale et le rayon de courbure de la développée sont égaux, ou bien dans un rapport constant.

4° *Développée de la cycloïde.* — L'équation naturelle de la cycloïde est

$$\frac{ds}{de} = 2m\cos e;$$

donc l'équation naturelle de la développée sera

$$\frac{ds_1}{de_1} = 2m\cos e_1;$$

donc la développée d'une cycloïde est une cycloïde. Si l'on rapporte ces deux équations à la même variable e, on aura les relations

$$\mathrm{R} = 2m\cos e, \quad \mathrm{R}_1 = -2m\sin e, \quad \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1^2 = 4m^2;$$

donc *la distance d'un point de la cycloïde au centre de courbure correspondant de la développée est constante, quel que soit le point que l'on considère sur la cycloïde.*

5° *Développée de la courbe* $\frac{ds}{de} = \mathrm{D} \cot e$. — Cette courbe, que nous avons trouvée au n° 25, a pour développée la ligne dont l'équation naturelle est

$$\frac{ds_1}{de_1} = -\frac{\mathrm{D}}{\cos^2 e_1},$$

c'est-à-dire une chaînette (n° 29)

6° *Développée de la parabole.* — L'équation naturelle de la parabole est (n° 29)

$$\frac{ds}{de} = \frac{b}{\sin^3 e};$$

l'équation naturelle de la développée sera donc

$$\frac{ds_1}{de_1} = -3b\frac{\sin e_1}{\cos^4 e_1}.$$

Or, d'après le n° 27, celle-ci est l'équation naturelle de la courbe $x^3 = py^2$, qui représente une parabole semi-cubique.

Nous ne poursuivrons pas davantage ces recherches, quelque intéressantes qu'elles soient, parce qu'elles ne présentent aucune difficulté.

44. *Des développées successives d'une courbe.* — Si l'on prend la développée de la développée d'une courbe, on aura la développée seconde de cette courbe; si l'on prend la développée de la développée seconde, on aura la développée troisième, et ainsi de suite.

Deux développées consécutives sont placées de la même manière lorsque le mouvement d'un point sur la courbe proposée produit simultanément sur ces deux développées le développement du fil enroulé sur ces courbes. Les développées consécutives sont inversement placées lorsque, par suite du mouvement d'un point sur la courbe proposée, le fil se développe sur l'une des deux développées et s'enveloppe sur l'autre. Dans le premier cas, les deux rayons de courbure de la courbe proposée et de sa développée croissent en même

temps avec l'arc de la courbe proposée; dans le second cas, ces deux rayons de courbure sont l'un croissant et l'autre décroissant lorsque l'arc de la courbe proposée est croissant.

Équation élémentaire de la développée de l'ordre n. — Nous conservons, pour représenter les lignes qui caractérisent une développée quelconque, les lettres qui désignent les grandeurs correspondantes dans la courbe proposée; mais, pour les distinguer, nous les affectons de l'accent qui marque le rang de la développée; d'après cela, on aura les équations

$$dR = \pm ds_1, \quad dR_1 = \pm ds_2, \ldots, \quad dR_{(n-1)} = \pm ds_n;$$
$$R\,de = ds, \quad R_1\,de_1 = ds_1, \ldots, \quad R_n\,de_n = ds_n,$$

auxquelles il faut joindre les relations angulaires

$$e_1 = e + \frac{\pi}{2}, \quad e_2 = e_1 + \frac{\pi}{2}, \quad e_n = e_{n-1} + \frac{\pi}{2};$$

on déduit de ces équations

$$R = \frac{ds}{de}, \quad R_1 = \pm \frac{d^2 s}{de^2}, \ldots, \quad R_{n-1} = \pm \frac{d^n s}{de^n},$$

dans lesquelles la signification du double signe se trouve expliquée par ce que nous avons dit plus haut. Ces formules montrent que, si l'équation élémentaire de la courbe proposée est $\frac{ds}{de} = \varphi(e)$, l'équation élémentaire de la développée $n^{ième}$ sera, $\varphi^{(n)}$ étant la dérivée $n^{ième}$ de φ,

$$\frac{ds_n}{de_n} = \varphi^{(n)}\left(e_n - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Rectification d'une développée quelconque. — Nous trouverons, pour une développée du rang n, une formule analogue à celle que nous avons trouvée pour la développée première,

$$R_{(n-1)} - B_{(n-1)} = \pm (s_n - l_n),$$

B_{n-1} et l_n étant les valeurs particulières de R_{n-1} et de s_n pour

une valeur particulière de e, et, par suite, on a

$$s_n = l_n \mp \left[\varphi^{(n-1)}\left(e_{n-1} - \frac{n-1}{2}\pi\right) - B_{n-1}\right].$$

45. *Coordonnées tangentielles.* — Nous déduirons des coordonnées tangentielles de la première développée, démontrées dans le paragraphe précédent, les coordonnées tangentielles de la deuxième développée, et ainsi de suite, et nous obtiendrons

$$X_1 = \frac{d(X\sin e)}{\cos e\, de}, \qquad X_3 = -\frac{d^3(X\sin e)}{\cos e\, de},$$

$$X_2 = -\frac{d^2(X\sin e)}{\sin e\, de}, \qquad X_4 = \frac{d^4(X\sin e)}{\sin e\, de},$$

. . . . , ... ,

$$X_{2n-1} = \pm\frac{d^{2n-1}(X\sin e)}{\cos e\, de}; \qquad X_{2n} = \mp\frac{d^{2n}(X\sin e)}{\sin e\, de};$$

$$r_1 = \frac{d(r\tang e)}{\tang e},$$

$$r_2 = \frac{d}{\cot e\, de}\left[\cot^2 e\,\frac{d}{de}(r\tang e)\right],$$

$$r_3 = \frac{d}{\tang e\, de}\left\{\tang^2 e\,\frac{d}{de}\left[\cot^2 e\,\frac{d}{de}(r\tang e)\right]\right\}.$$

. . . .

On trouvera aussi, en faisant usage des formules (6″) et (7″), les expressions suivantes :

$$X_n = \int \frac{1}{\sin^2\left(e + \frac{n\pi}{2}\right)} \int \frac{d^{n+1}s}{de^{n+1}} \sin\left(e + \frac{n\pi}{2}\right) de,$$

$$r_n \sin\left(e + \frac{n\pi}{2}\right) = \int \frac{d^{n+1}s}{de^{n+1}} \sin\left(e + \frac{n\pi}{2}\right) de.$$

Coordonnées rectangles. — Ces coordonnées sont [4'] :

$$x_n - x_0 = \int \frac{d^{n+1}s}{de^{n+1}} \cos\left(e + \frac{n\pi}{2}\right) de,$$

$$y_n - y_0 = \int \frac{d^{n+1}s}{de^{n+1}} \sin\left(e + \frac{n\pi}{2}\right) de.$$

Si l'on connaissait les coordonnées x, y de la courbe proposée en fonction de e, on trouverait, en projetant le polygone dont les côtés sont R, R_1, R_2, R_{n-1} sur les axes des x et des y, les deux formules suivantes, qui sont indépendantes de tout signe intégral :

$$x_n - x = \Sigma R_{n-1} \cos e_n, \quad y_n - y = \Sigma R_{n-1} \sin e_n,$$

dans lesquelles le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de n, depuis 1 jusqu'à n. Ces formules se déduisent aussi des précédentes par une suite d'intégrations par parties.

On doit remarquer que les formules qui donnent soit les coordonnées tangentielles, soit les coordonnées rectangles d'une développée quelconque, se rapportent les unes aux cas où la courbe proposée n'est connue que par son équation élémentaire, les autres au cas où la courbe est donnée par ses coordonnées, soit rectangles, soit tangentielles. Dans ce second cas, il n'y a aucune intégration à effectuer.



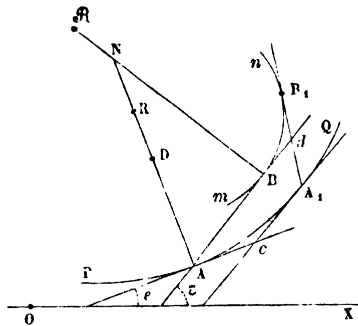
CHAPITRE III.

DEUXIÈME SYSTÈME DE COORDONNÉES TANGENTIELLES.

§ I. — Étude générale.

46. *Définitions.* — Appelons *rayon tangentiel* d'une courbe mn (*fig.* 8) au point B la longueur r de la tangente menée en

Fig. 8.



ce point à cette courbe jusqu'à la rencontre d'une autre courbe PQ; *abscisse curviligne* la longueur s de l'arc de courbe PQ comptée à partir d'une origine fixe O_1 prise sur cette courbe jusqu'à la rencontre A du rayon tangentiel avec la courbe PQ; enfin *angle coordonné* l'angle que le rayon tangentiel fait avec la tangente au point A à la courbe PQ; nous représentons ces coordonnées par les lettres r, s, a. La courbe PQ sera appelée *courbe directrice*. Il est évident que la connaissance de a et de s fait connaître la tangente à la courbe mn, et que r donnera le point correspondant de cette courbe. Dans chaque cas particulier, on fixera dans quel sens l'angle a et l'arc s sont comptés.

Équations différentielles. — Le point O_1 étant l'origine des abscisses curvilignes s comptées positivement sur la courbe directrice de O_1 en Q, si au point A nous menons une tangente à la courbe PQ, nous regardons comme positive la portion de tangente comptée à partir du point A dans le même sens que les arcs positifs. Si du point A nous menons un rayon tangentiel r à la courbe mn au point B, l'angle a que ce rayon fait avec la tangente à la ligne PQ au point A est compté positivement de droite à gauche à partir de la portion positive de la tangente en A. Soient e et ε les angles que les tangentes aux deux courbes en deux points correspondants A, B font avec l'axe fixe OX, le sens de ces angles et de cet axe étant déterminé. Du point A_1 infiniment voisin du point A sur la courbe mn, menons deux tangentes, l'une à la courbe PQ et l'autre à la courbe mn. Soient c le point d'intersection des deux tangentes à la courbe PQ et d le point d'intersection des deux tangentes à la courbe mn; les angles du quadrilatère formé sur les deux couples de tangentes en A et A_1 sont

$$a, \quad 180 - de, \quad 180 - a - da, \quad d\varepsilon,$$

et les côtés

$$\frac{1}{2}\,ds, \quad \frac{1}{2}\,ds, \quad r + dr - \frac{1}{2}\,d\sigma, \quad r + \frac{1}{2}\,d\sigma.$$

Si l'on projette le périmètre sur la direction du rayon tangentiel r et ensuite sur une direction perpendiculaire, on aura les deux équations

$$\left(r + \frac{1}{2}\,d\sigma\right) = \left(r + dr - \frac{1}{2}\,d\sigma\right) + \left(\frac{1}{2}\,ds\cos a\right) + \frac{1}{2}\,ds\cos(a - de),$$

$$\frac{1}{2}\,ds\sin a = \left(r + dr - \frac{1}{2}\,d\sigma\right)\sin d\varepsilon - \frac{1}{2}\,ds\sin(a - de),$$

et, en négligeant les infiniment petits du second ordre, on a les deux équations

$$(1) \qquad \sin a = \frac{r\,d\varepsilon}{ds}, \quad \cos a = \frac{d\sigma - dr}{ds}.$$

D'une autre part, la somme des angles du quadrilatère étant égale à 360, et ces angles étant a, $180 - de$, $180 - a - da$, $d\varepsilon$, on a l'équation

$$(2) \qquad d\varepsilon = de + da.$$

Soit du la différentielle de l'aire balayée par le rayon tangentiel r, on a la relation suivante :

$$(3) \qquad du = \frac{1}{2} r^2 d\varepsilon.$$

Les équations (1) donnent, la première, le rayon tangentiel de la courbe mn; la deuxième, l'élément de cette courbe. L'équation (2) fait connaître l'angle de contingence, et l'équation (3) l'aire de la même courbe.

47. *Équation du rayon tangentiel.* — Si l'on élimine ε entre la première des équations (1) et l'équation (2), on trouve

$$(2') \qquad \frac{\sin a}{r} = \frac{de}{ds} + \frac{da}{ds}.$$

Il est utile de remarquer les modifications de signe qui s'introduisent dans cette formule, suivant les différentes hypothèses que l'on fait sur l'origine et la direction des coordonnées s et a. Ainsi, si l'angle a est compté toujours dans le même sens, mais à partir de la portion négative de la tangente à la directrice au point A, le premier membre change de signe. Si, l'origine de cet angle ne changeant pas, cet angle est compté en sens contraire, le premier et le dernier terme de l'équation changent de signe, et ainsi de suite.

Appelons N la longueur de la normale à la directrice au point A, comprise entre ce point et la normale à la courbe mn au point correspondant B, le premier membre de l'équation (2') est l'inverse de cette normale; $\frac{ds}{de}$ est le rayon de courbure R de la directrice; $\frac{ds}{da}$ est le rapport du déplacement du point d'intersection du rayon r avec la directrice au dépla-

cement angulaire de ce rayon autour de ce point par rapport à la tangente à la directrice, lorsque ces déplacements sont infiniment petits. Ce rapport étant essentiellement linéaire, nous le représentons par D, et alors l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$(2') \qquad \frac{1}{N} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D}.$$

Construction géométrique du rayon tangentiel. — Sous cette forme, cette équation montre que si, à partir du point A, on prend sur la normale à la directrice en ce point deux longueurs AR, AD égales à R et à D, et une longueur AN_1 égale à 2AN, les quatre points A, N_1, R, D partagent la normale harmoniquement.

R est le centre de courbure de la directrice; les points N_1 et D doivent être pris du même côté que R par rapport au point A, ou du côté opposé, suivant que D et N ont le même signe que R ou des signes contraires.

D'après cela, si deux des trois quantités N_1, R, D sont connues, la troisième sera déterminée. Supposons, par exemple, que les deux quantités connues sont R et D, il suffira, pour construire N, de chercher le point conjugué harmonique N_1 de A par rapport aux deux points R et D et de prendre la moitié de AN_1; connaissant le point N tel que $AN = \frac{1}{2} AN_1$, on aura le rayon tangentiel. En effet, la connaissance du rapport D implique la connaissance de s en fonction de α; par conséquent, la direction du rayon r au point A est connue, et, en projetant N sur cette direction, on aura AB, c'est-à-dire la longueur du rayon r.

48. *Équation du rayon de courbure.* — La seconde équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$(4) \qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{dr}{d\varepsilon} + \cos\alpha \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{dr}{d\varepsilon} + r\cot\alpha.$$

Le premier membre de cette équation est le rayon de cour-

bure $\mathfrak{R}$ de la courbe *mn*, le terme $\frac{dr}{d\varepsilon}$ est le rapport de la variation du rayon tangentiel au déplacement angulaire de ce rayon autour du point A; le dernier terme est la projection de la normale N sur le rayon de courbure $\mathfrak{R}$; en effet, d'après la première des équations (1), ce terme peut s'écrire sous la forme $\frac{r}{\sin a}\cos a = \mathrm{N}\cos\alpha$; de là résulte que la normale N à la directrice au point A partage le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ en deux segments, dont l'un NB est la projection de la normale N sur ce rayon, et dont l'autre N$\mathfrak{R}$ a pour expression le rapport $\frac{dr}{d\varepsilon}$. Si l'on appelle $\mathfrak{P}$ cette projection, on a

$$(4') \qquad \frac{dr}{d\varepsilon} = \mathfrak{R} - \mathfrak{P};$$

il suffira donc de déterminer ce rapport pour construire le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ de la courbe *mn*; et, réciproquement, lorsque la courbe *mn* sera donnée, le rapport $\frac{dr}{d\varepsilon}$ sera connu. Or on a

$$r = \mathrm{N}\sin a,$$

N étant donnée par l'équation (2'); de plus, on a les relations

$$(10) \qquad \mathrm{R}\,de = \mathrm{N}\,d\varepsilon = \mathrm{D}\,da;$$

d'après cela, l'équation (4') donnera successivement

$$\mathfrak{R} = \mathrm{N}\cos a + \frac{d(\mathrm{N}\sin a)}{d\varepsilon},$$

$$(6) \qquad \mathfrak{R} = \left(\mathrm{N} + \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{D}}\right)\cos a + \frac{d\mathrm{N}}{d\varepsilon}\sin a;$$

d'une autre part, par la différentiation par rapport à ε de l'équation (2'), on trouve

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}^3 d\varepsilon} = \left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}^3} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}^3}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (6) on obtient l'une des deux formes suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathcal{R}}{r} = \left(\dfrac{2R+D}{R+D}\right)\cot a + \dfrac{r^2}{\sin^2 a}\left(\dfrac{R'}{R^3}+\dfrac{D'}{D^3}\right), \\ \dfrac{\mathcal{R}}{N^2} = \left(\dfrac{2}{D}+\dfrac{1}{R}\right)\cos a + N\left(\dfrac{R'}{R^3}+\dfrac{D'}{D^3}\right)\sin a. \end{cases}$$

Si, dans ces équations, on introduit l'auxiliaire R_1, telle que $R = N + R_1$, on aura la valeur de $\mathcal{R}$ sous l'une des trois formes

$$(6')\qquad \begin{cases} \mathcal{R} = \left(N + \dfrac{N^2}{D}\right)\cos a + \dfrac{dN}{d\varepsilon}\sin a, \\ \mathcal{R} = \left(R - \dfrac{R_1^2}{R}\right)\cos a + N^3\left(\dfrac{R'}{R^3}+\dfrac{D'}{D^3}\right)\sin a, \\ \mathcal{R} = \left(R - \dfrac{R_1^2}{R}\right)\cos a + \dfrac{dN}{d\varepsilon}\sin a. \end{cases}$$

Si, dans les mêmes équations, on introduit l'auxiliaire $\mathfrak{r}$, telle que $\mathfrak{r} = R + D$, on obtiendra la nouvelle relation

$$(6'')\qquad \mathcal{R} = \frac{\mathfrak{r}^2 - R^2}{\mathfrak{r}^2} R\cos a + \frac{R'D^3 + D'R^3}{\mathfrak{r}^3}\sin a.$$

On déduira avec la même facilité la formule suivante :

$$(6''')\qquad \frac{\mathcal{R} - N\cos a}{N^3} = \frac{D'\sin a + D\cos a}{D^3} + \frac{R'\sin a + \dfrac{R^2}{D}\cos a}{R^3}.$$

On déduit des formules (6), (6′) et (6″) le théorème suivant :

Théorème. — *Le rayon de courbure $\mathcal{R}$ s'obtient en projetant sur la normale l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux rayons de courbure de la directrice et de sa développée, et ont pour longueur les valeurs des coefficients des sinus et cosinus de l'une quelconque des équations* (6).

La construction de ces coefficients est donnée par la construction des conjuguées harmoniques.

Différentielle de l'aire. — Si, dans l'équation (3), on remplace $d\varepsilon$ par sa valeur tirée de la première des équations (1), on trouve

$$du = \frac{1}{2} r \sin a \, ds; \tag{3'}$$

$r \sin a$ est la projection du rayon tangentiel sur la normale. Si l'on développe la directrice sur la tangente à l'origine O_1 des s, les projections telles que $r \sin a$ seront les ordonnées d'une courbe dont la différentielle de l'aire est $r \sin a \, ds$; en appelant dv' cette différentielle, on aura

$$2\,du = dv',$$

et, par suite,

$$2(u - u_0) = (v' - v'_0);$$

donc *l'aire balayée par le rayon tangentiel avant le développement de la courbe directrice est le double de l'aire balayée après le développement de cette directrice par les projections des rayons tangentiels sur la normale obtenues avant le développement.*

Si, après avoir remplacé dans l'équation (3) $d\varepsilon$ par $de + da$, on divise cette équation par le carré de l'équation (3'), on trouve l'équation

$$\frac{\sin^2 a}{du} = \frac{2}{R^2 de} + \frac{2}{D^2 da}; \tag{3''}$$

le premier terme du second membre est l'inverse de la différentielle de l'aire dv balayée par le rayon de courbure de la directrice et le dernier terme l'inverse de la différentielle de l'aire dw balayée par le rayon de courbure de la courbe dont l'équation naturelle serait $\frac{ds}{da} = D$. On peut donc écrire l'équation précédente sous cette nouvelle forme :

$$\frac{\sin^2 a}{du} = \frac{1}{dv} + \frac{1}{dw}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{N^2 d\varepsilon} = \frac{1}{R^2 de} + \frac{1}{D^2 da}. \tag{7}$$

49. *De la normale à la courbe.* — La longueur $\mathfrak{N}$ de la

normale à la courbe *mn* au point B est comptée à partir de ce point jusqu'à l'intersection de la normale avec la normale à la courbe directrice au point correspondant A, et il est visible que l'on a la relation

$$(8) \qquad \mathcal{N} = r \tang a.$$

Si avec une ouverture de compas égale à $\mathcal{N}$ on décrit du point B comme centre un cercle, les deux segments déterminés par ce cercle sur la normale à partir du centre de courbure ont pour expression $\mathcal{R} - \mathcal{N}$ et $\mathcal{R} + \mathcal{N}$; on a donc les deux équations

$$(9) \quad \mathcal{R} - \mathcal{N} = \frac{2r\cos 2a}{\sin 2a} + \frac{d(2r)}{d(2\varepsilon)}, \quad \mathcal{R} + \mathcal{N} = \frac{2r}{\sin 2a} + \frac{d(2r)}{d(2\varepsilon)}.$$

Soit R_1 le rayon de courbure de la courbe dont les deux coordonnées tangentielles (rayon et son inclinaison sur la tangente à la directrice) seraient $2r$ et $2a$, et dont la courbe directrice ds_1 serait déterminée par la condition $\frac{ds_1}{d(2\varepsilon)} = \frac{2r}{\sin 2a}$: ce rayon de courbure serait (4) en longueur égal au segment $\mathcal{R} - \mathcal{N}$ que nous venons de définir, correspondant aux coordonnées tangentielles r, a et à la directrice $\frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{r}{\sin a}$.

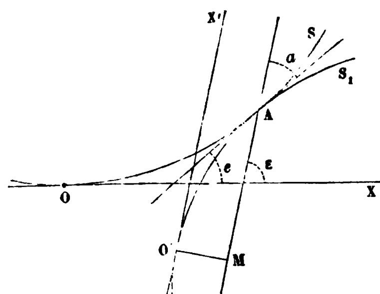
50. *Interprétation géométrique des équations.* — Cette interprétation ressortira de la solution des deux questions suivantes :

Première question. — *Une courbe roule sur une autre courbe; par leur point de contact on mène une droite parallèle à une droite donnée dans le plan de la courbe mobile, enveloppe de cette courbe.*

Supposons (*fig.* 9) que $\frac{ds_1}{da} = D$ soit l'équation élémentaire de la courbe roulante rapportée à un axe O′X′ situé dans son plan et tangent à la courbe à l'origine des arcs; supposons, de plus, que cette courbe entraînant ce plan roule sans glisse-

ment sur la courbe $\frac{ds}{de} = R$, rapportée à un axe OX tangent à cette courbe en son origine O, D étant une fontion de a et

Fig. 9.



R une fonction de e. Si l'on admet qu'au commencement du mouvement les origines O et O′ coïncident ainsi que les axes OX et O′X′, il est visible que, ds et ds_1 étant égaux, on a la relation

$$(10) \qquad R\,de = D\,da;$$

or, si par le point de contact des deux courbes on mène une parallèle à l'axe mobile O′X′, en appelant ε l'angle qu'elle fait avec l'axe fixe OX, on aura l'équation

$$(11) \qquad \varepsilon = e \mp a,$$

le signe supérieur se rapportant au cas où les convexités des deux courbes ont le même sens, et le signe inférieur au cas où les convexités sont de sens contraires. On aura donc pour l'enveloppe de cette droite les équations (1).

Seconde question. — *Une courbe roule sur une autre courbe, enveloppe d'une droite située dans le plan de la courbe roulante.*

Si l'on considère les deux courbes comme deux polygones infinitésimaux dont les côtés qui doivent se placer successivement en coïncidence soient égaux, on voit qu'entre les

coïncidences consécutives des deux côtés d'un angle du polygone mobile avec les deux côtés de l'angle correspondant du polygone fixe il y a rotation de la figure mobile autour du sommet commun des deux angles; on déduit de là les propositions suivantes :

1° Les différents points de la figure mobile décrivent autour du sommet commun de ces deux angles des arcs infiniment petits de cercles.

2° Toute droite située dans le plan mobile demeurant, pendant le mouvement infinitésimal, à la même distance du centre de rotation, reste tangente à un cercle dont le centre est le centre de rotation, et, par suite, cette droite touche son enveloppe en un point qui est le pied de la normale abaissée du centre de rotation sur la droite.

De là résulte que, si par le point O′ on mène O′M perpendiculaire à O′X′ dans le plan de la figure mobile, l'enveloppe de cette perpendiculaire sera déterminée par les pieds des normales abaissées des différents points de contact des deux courbes sur la droite O′M; or ces normales coïncident visiblement avec les parallèles menées des mêmes points à l'axe O′X′.

On conclut que l'enveloppe de la perpendiculaire à O′X′, menée du point O′ dans le plan de la figure mobile, est la développante de l'enveloppe des parallèles à O′X′ menées des différents points de contact de la courbe roulante avec la courbe fixe, puisque, dans toutes les positions, la tangente de la première enveloppe est perpendiculaire à la tangente correspondant à la seconde enveloppe. On déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Deux courbes sont telles que leurs équations naturelles sont* $\frac{ds_1}{da} = D$, $\frac{ds}{de} = R$ *par rapport aux deux droites* O′X′, OX, *qui leur sont tangentes chacune à chacune, la première au point* O′, *la seconde au point* O. *On fait rouler sur la seconde courbe la première, de telle sorte qu'elle entraîne dans son mouvement une droite perpendiculaire à* O′X′, *les points de contact* O *et* O′ *coïncidant à l'ori-*

gine du mouvement; l'enveloppe de cette droite sur le plan fixe a pour développée l'enveloppe d'une droite dont un point parcourt la courbe $\left(\frac{ds}{de} = \mathrm{R}\right)$, *et tournant autour de ce point par cette condition, que le quotient de la vitesse de translation par la vitesse de rotation par rapport à la tangente soit égal à* D.

L'enveloppe de cette droite mobile est donc une courbe déterminée et complétement définie dès que les deux courbes $\left(\frac{ds}{de} = \mathrm{R}\right)$, $\left(\frac{ds_1}{da} = \mathrm{D}\right)$ sont données; nous l'appellerons, pour abréger, la *résultante des courbes* (R) *et* (D).

51. *Courbe polaire indicatrice.* — On obtient cette courbe en menant d'un point des rayons égaux et parallèles aux rayons tangentiels. Elle a évidemment pour équation

$$r = \frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{R}+\mathrm{D}} \sin a, \tag{12}$$

dans laquelle le second membre est exprimé en fonction de ε, r est le rayon vecteur, ε l'angle polaire compté à partir d'une parallèle à l'axe OX.

1° Soit ds' l'élément d'arc de cette courbe, a_1 l'angle de sa tangente avec son rayon vecteur (ε_1 l'angle qu'elle fait avec l'axe fixe), $\mathfrak{N}_1$ la normale, on a

$$dr = ds' \cos a_1, \quad r\,d\varepsilon = ds' \sin a_1, \quad \cot a_1 = \frac{dr}{r\,d\varepsilon}. \tag{13}$$

Éliminant $\frac{dr}{r\,d\varepsilon}$ entre cette dernière équation et l'équation (4), on trouve

$$\frac{\mathfrak{R}}{r} = \cot a + \cot a_1 = \frac{\sin(a+a_1)}{\sin a \sin a_1}; \tag{14}$$

or $(a + a_1)$ est l'angle que la tangente à cette courbe polaire fait avec la tangente correspondant à la courbe directrice PQ,

et, d'une autre part, $\mathcal{N}_1$ est égale à $\frac{r}{\sin a_1}$; on a donc

$$(14') \qquad \mathcal{R} \sin a_1 = \mathcal{N}_1 \sin(a + a_1).$$

On conclut de cette équation le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on projette la normale à la courbe polaire et le rayon de courbure de la courbe mn sur la tangente correspondante de la courbe directrice, ces deux projections sont égales.*

Ce théorème donne immédiatement la construction géométrique du rayon de courbure de la courbe *mn* quand la courbe polaire auxiliaire est connue.

2° L'aire de la courbe polaire et l'aire de la courbe *mn* sont égales, ces aires étant terminées, ce qui est toujours possible, par deux rayons égaux et parallèles.

3° Si dans la seconde équation (1) on remplace dr par sa valeur tirée de l'équation polaire auxiliaire, on aura

$$(15) \qquad d\sigma = ds' \cos a_1 + ds \cos a;$$

donc les trois éléments $d\sigma$, ds', ds sont toujours tels, qu'en leur conservant leur grandeur et leur direction un triangle se trouve construit sur ces éléments. Les angles opposés à ces côtés sont $\pi - a - a_1$, a, a_1.

52. PROBLÈME I. — *Connaissant l'équation élémentaire de la directrice* $\frac{ds}{de} = \varphi'(e)$ *et le rapport* $\frac{ds}{da} = \psi'(a)$ *de la variation de l'arc à la variation de l'angle coordonné, déterminer analytiquement l'enveloppe du rayon tangentiel.*

Des deux valeurs de ds données par la nature de la question, on déduit :

$$(16) \qquad s - s_0 = \psi(a) - \psi(a_0), \quad s - s_0 = \varphi(e) - \varphi(e_0),$$

$$(17) \qquad \psi(a) - \varphi(e) = \psi(a_0) - \varphi(e_0).$$

Cette dernière équation donne e en fonction de a, et comme $\varepsilon = e + a$, ε est aussi connu en fonction de a; d'après cela,

$\varphi'(e)$ est égal à une certaine fonction de a qui sera représentée par $f'(a)$.

Le rayon tangentiel se déduit de la première équation (1), laquelle devient

$$[2] \qquad r = \frac{f'(a)\psi'(a)}{f'(a)+\psi'(a)}\sin a.$$

La rectification de la courbe est donnée par la deuxième équation (1), laquelle donne par l'intégration

$$(18) \qquad \sigma = r + \int \psi'(a)\cos a\, da.$$

Si l'on exprime le second membre en fonction de ε, au moyen des relations établies ci-dessus, la dérivée de σ par rapport à ε fera connaître l'équation élémentaire de la courbe qui sera une nouvelle expression du rayon de courbure.

La quadrature de la courbe sera fournie par l'intégration de l'équation (3'), et l'on aura

$$(19) \qquad u = \frac{1}{2}\int \frac{f'(a)[\psi'(a)]^2}{f'(a)+\psi'(a)}\sin^2 a\, da.$$

§ II. — Des développées obliques des courbes.

53. **Problème II.** — *Si des différents points d'une courbe* $\frac{ds}{de} = f'(e)$, *on mène des rayons formant des angles constants, égaux à a, avec les tangentes à la courbe en ces points, le lieu des intersections de ces rayons est la développée oblique de la courbe; déterminer les propriétés de cette courbe.*

Les données de la question dans le système tangentiel sont exprimées par les deux équations

$$(1) \qquad \frac{ds}{de} = f'(e), \quad \frac{ds}{da} = \frac{1}{0},$$

Rayon oblique de courbure. — Dans le cas qui nous occupe, le rayon tangentiel est appelé *rayon oblique de courbure* de la

directrice, parce qu'il se confond avec le rayon de courbure de cette ligne lorsque l'angle est droit; son extrémité est appelée *centre de courbure oblique;* l'angle de deux rayons obliques infiniment voisins est l'angle de contingence de la développée oblique, ou simplement l'*angle de contingence oblique* de la directrice. Cela posé, le rayon tangentiel se réduit de la première équation (1) du n° 46, laquelle devient

$$(2) \qquad r = R \sin a.$$

Cette formule, qui est due à Réaumur, montre que le rayon oblique de courbure de la courbe directrice est la projection du rayon de courbure de la courbe.

Il résulte de là qu'en un point les rayons de courbure oblique sous différentes inclinaisons ont leurs extrémités situées sur une circonférence de cercle dont le rayon de courbure est le diamètre.

Rayon de courbure de la développée oblique. — Ce rayon se déduit de la deuxième formule (1) du n° 46; si l'on remarque que ε ne diffère de e que par une constante, l'équation (2) du présent numéro, en représentant par R′ le rayon de courbure de la développée de la directrice, donne la relation suivante :

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = \sin a \frac{dR}{de} = \sin a R'.$$

On a donc les deux équations suivantes :

$$(3) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d^2 s}{de^2} \sin a + \frac{ds}{de} \cos a, \quad \mathcal{R} = R' \sin a + R \cos a,$$

desquelles on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le rayon de courbure de la développée oblique d'une courbe est la somme des projections du rayon de courbure de cette courbe, et du rayon de courbure de sa développée sur la direction de la normale à la développée oblique.*

De là résulte que, pour trouver le centre de courbure de la développée oblique d'une courbe, il suffit de projeter sur

la normale à cette développée le centre de courbure de la deuxième développée de la courbe.

Aire balayée par le rayon oblique de courbure. — L'équation (3) du n° 46 donne, dans le cas présent, l'équation

$$du = dv \sin^2 a,$$

laquelle, par l'intégration, devient, u_0, v_0 étant des constantes,

$$(4) \qquad u - u_0 = (v - v_0)\sin^2 a;$$

on a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Les aires balayées par le rayon de courbure oblique et par le rayon de courbure d'une courbe sont dans le rapport de 1 au carré du sinus de l'angle de l'inclinaison du rayon oblique sur la tangente.*

Ce théorème est dû à Réaumur.

Rectification de la développée oblique. — Si l'on intègre la deuxième des équations (1) du n° 46, et qu'on représente par σ_0, s_0, R_0, r_0 les valeurs des variables correspondant à un point déterminé, on obtient les deux équations suivantes :

$$(5) \qquad \sigma - \sigma_0 = r - r_0 + (s - s_0)\cos a,$$

$$(5') \qquad \sigma - \sigma_0 = (R - R_0)\sin a + (s - s_0)\cos a,$$

desquelles on déduit un théorème analogue à celui qui donne le rayon de courbure de la développée oblique.

Théorème. — *Si l'on développe l'arc $s - s_0$ sur la tangente à l'origine de cet arc, que par l'autre extrémité de cet arc développé on mène sous l'angle a une longueur égale à r, et que de l'extrémité du rayon r on abaisse une perpendiculaire à la tangente à l'origine de l'arc $\sigma - \sigma_0$, cette perpendiculaire détermine sur la tangente une longueur égale à l'arc $\sigma - \sigma_0$.*

54. Problème III. — *Trouver les propriétés des développées obliques successives d'une courbe.*

Si l'on prend la développée oblique de la développée oblique d'une courbe, on aura la seconde développée oblique de

cette courbe; si l'on prend la développée oblique de cette seconde développée oblique, on aura la développée oblique troisième, et ainsi de suite.

Notation. — Nous établissons les conventions suivantes :

$\sigma_{(n)}$, $r_{(n)}$, $R_{(n)}$ sont l'arc de développée oblique de l'ordre n, son rayon de courbure oblique, son rayon de courbure;

$\sigma^{(n)}$, $r^{(n)}$, $R^{(n)}$ sont l'arc de développée de l'ordre n, son rayon de courbure oblique, son rayon de courbure;

$\sigma_{(i)}^{(k)}$, $r_{(i)}^{(k)}$, $R_{(i)}^{(k)}$ sont l'arc de développée de l'ordre k de la développée oblique de l'ordre i, son rayon de courbure oblique, son rayon de courbure;

e_n est l'angle que la tangente à la développée oblique de l'ordre n fait avec l'axe fixe;

a_n est l'angle que son rayon oblique de courbure fait avec la tangente.

Formules générales. — D'après ce qui vient d'être établi dans le numéro précédent, on a les équations suivantes :

$$(1)\qquad r = R\sin a,\quad r_1 = R_1 \sin a_1, \ldots,\quad r_n = R_n \sin a_n;$$

$$(2)\qquad e_1 = e + a,\quad e_2 = e_1 + a_1, \ldots,\quad e_n = e_{n-1} + a_{n-1};$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} R_1 &= R\cos a + R'\sin a,\\ R_2 &= R_1\cos a_1 + R'_1 \sin a_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_n &= R_{n-1}\cos a_{n-1} + R'_{n-1}\sin a_{n-1};\\ \frac{d\sigma_1}{de_1} &= \frac{d\sigma}{de}\cos a + \frac{d^2\sigma}{de^2}\sin a,\\ \frac{d\sigma_2}{de_2} &= \frac{d\sigma_1}{de_1}\cos a_1 + \frac{d^2\sigma_1}{de_1^2}\sin a_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{d\sigma_n}{de_n} &= \frac{d\sigma_{n-1}}{de_{n-1}}\cos a_{n-1} + \frac{d^2\sigma_{n-1}}{de_{n-1}^2}\sin a_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

De ces formules on déduit facilement les suivantes, dans lesquelles les valeurs initiales des variables sont représentées par les mêmes lettres placées entre parenthèses ( ). Ces for-

mules sont :

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_1 - (\sigma_1) = r - (r) + [\sigma - (\sigma)]\cos a, \\ \sigma_2 - (\sigma_2) = r_1 - (r_1) + [\sigma_1 - (\sigma_1)]\cos a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sigma_n - (\sigma_n) = r_{n-1} - (r_{n-1}) + [\sigma_{n-1} - (\sigma_{n-1})]\cos a_{n-1}. \end{cases}$$

Rayon de courbure. — On déduit de ces équations les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on prend la développée oblique sous l'angle a d'une courbe σ et la développée oblique sous l'angle a_1 de cette développée, on trouve la même courbe que si l'on prend la développée oblique sous l'angle a_1 de la courbe σ et la développée oblique sous l'angle a de cette développée.*

En effet, si l'on prend la dérivée par rapport à e de l'équation qui donne la valeur de R_1, et qu'on porte les valeurs de R_1, R'_1 dans l'équation qui donne la valeur de R_2, on obtient l'équation suivante :

$$(5)\quad R_2 = \sin a \sin a_1 R'' + \sin(a + a_1)R' + \cos a \cos a_1 R.$$

Cette équation étant symétrique par rapport à a, a_1, et ne renfermant que le rayon de courbure de la courbe σ, on aurait trouvé le même résultat si l'on avait fait les opérations d'une manière inverse; donc, etc. On déduit sans difficulté les théorèmes qui suivent :

Théorème II. — *Si l'on prend n développées obliques successives d'une courbe σ sous les angles a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, la développée oblique de l'ordre n sera la même dans quelque ordre que l'on fasse intervenir les angles a, a_1, a_2, ..., a_{n-1}.*

Théorème III. — *Si l'on prend les développées obliques de l'ordre n d'une courbe σ en permutant de toutes les manières possibles les angles a, a_1, ..., a_{n-1}, sous lesquels sont prises les développées obliques successives, l'ensemble des rayons de courbure oblique de ces différents systèmes formeront autant de lignes brisées dont les deux extrémités seront communes.*

Corollaire I. — *Les théorèmes précédents existent toujours*

lorsque, parmi les développées obliques successives, certaines deviennent orthogonales. Car cela revient à poser certains des angles $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ égaux à un angle droit.

D'après cela, on obtient les propositions suivantes :

Corollaire II. — *La développée d'une développée oblique sous l'angle a d'une courbe σ est la développée oblique sous l'angle a de la développée de la courbe σ, et ainsi de suite.*

Construction du rayon de courbure. — Pour obtenir le centre de courbure de la développée oblique de l'ordre n sous les angles $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, construisez les rayons de courbure de la courbe σ et de ses développées successives jusqu'à l'ordre n; à la ligne brisée dont les côtés sont $R, R', R'', \ldots, R^{(n)}$, circonscrivez une seconde ligne brisée à angles droits dont le premier côté forme l'angle a avec le côté R, et projetez les extrémités de la première ligne brisée sur les côtés extrêmes de la seconde; on détermine ainsi une ligne brisée qui a un côté de moins; opérez sur cette ligne brisée et sous l'angle a_1 comme on a opéré sur la première sous l'angle a, vous aurez une nouvelle ligne brisée qui aura un côté de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la ligne brisée obtenue se réduise à un seul côté; les extrémités de ce côté sont l'une le point de la développée de l'ordre n, l'autre le centre de courbure de cette développée.

Cette construction donne à la fois le point de la courbe, sa tangente et son rayon de courbure correspondants, et l'on voit que le résultat final ne dépend pas de l'ordre dans lequel les angles $a, a_1, a_2, \ldots$ sont intervenus.

Rectification de la développée oblique de l'ordre n. — L'inspection des formules (4) conduit à la construction suivante de l'arc de développée oblique de l'ordre n :

Théorème I. — *Développez l'arc $[\sigma - (\sigma)]$ sur la tangente à l'origine de cet arc; par l'origine du même arc, menez sous l'angle a le rayon (r); par l'extrémité de ce rayon, menez sous l'angle a_1 par rapport à ce rayon une ligne égale à (r_1), et ainsi de suite jusqu'au rayon (r_{n-1}); par l'autre extrémité de l'arc $[\sigma - (\sigma)]$ développé, menez sous l'angle a le rayon r, et*

de l'extrémité de ce rayon une perpendiculaire sur (r); *du pied de cette perpendiculaire menez un rayon* r_1 *formant avec* (r) *un angle* a_1, *et de l'extrémité de ce rayon abaissez une perpendiculaire sur* (r_1), *et ainsi de suite, jusqu'au point qui sera le pied de la perpendiculaire abaissée sur* (r_{n-1}); *l'arc* $[\sigma_n - (\sigma_n)]$ *est égal à la distance du pied de cette perpendiculaire à l'extrémité du rayon* (r_{n-1}).

Théorème II. — *Dans cette construction, la longueur de l'arc* $[\sigma_n - (\sigma_n)]$ *est indépendante de l'ordre dans lequel on fait intervenir les angles* $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

En effet, si l'on élimine $r - (r)$ entre les deux premières équations (4) relatives aux arcs des développées, et si l'on exprime dans l'équation résultante les rayons r, r_1 en fonction de R, R_1, et R_1 en fonction de R et R' au moyen de la première des équations (3), on obtient l'équation

$$\sigma_2 - (\sigma_2) = [R - (R)] \sin(a + a_1) \\ + [R' - (R')] \sin a \sin a_1 + [\sigma - (\sigma)] \cos a \cos a_1,$$

laquelle étant symétrique par rapport à a, a_1, et ne dépendant que des éléments de la première courbe et de sa développée oblique seconde, conduit immédiatement au théorème énoncé.

55. Problème IV. — *Enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, ce point décrivant une courbe donnée, et le rapport des vitesses de rotation et de translation étant constant.*

Le cas le plus simple après celui où $\frac{da}{ds}$ est nul est le cas où le rapport $\frac{ds}{d\varepsilon}$ est constant; on obtient alors une classe très-étendue de courbes jouissant de propriétés intéressantes.

Conservons la notation du n° 47, et soient (*fig.* 10) l'équation élémentaire de la directrice et le rapport des vitesses

$$\frac{ds}{de} = R, \quad \frac{ds}{d\varepsilon} = N, \tag{1}$$

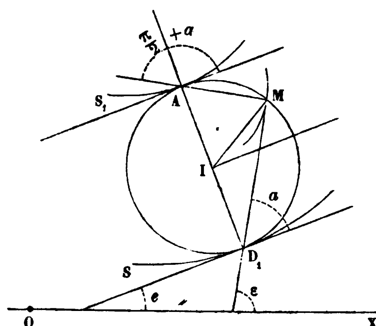
R étant une fonction de e et N une constante. De ces deux

équations, jointes à la condition $\varepsilon = e + a$, on déduit les relations

$$(2)\quad (\mathrm{R} - \mathrm{N})\,de = \mathrm{N}\,da, \quad \mathrm{R}\,de = \mathrm{N}\,d\varepsilon, \quad \mathrm{R}\,da = (\mathrm{R} - \mathrm{N})\,d\varepsilon.$$

Or, si l'on pose $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R} - \mathrm{N}$, l'équation de la courbe parallèle à la directrice qui, dans le cas de notre figure, est intérieure

Fig. 10.



à cette courbe et à une distance N, en représentant par s_1 l'arc de cette courbe parallèle, est donnée par la relation

$$(3)\qquad \frac{ds_1}{de} = \mathrm{R}_1.$$

On déduit de ce qui précède les équations

$$(4)\qquad \mathrm{N}a = \int_0^e \mathrm{R}_1\,de, \quad a = \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}\,d\varepsilon,$$

et, conséquemment, on a les relations

$$(5)\qquad s = \int_0^e \mathrm{R}\,de, \quad s_1 = \int_0^e \mathrm{R}\,de - \mathrm{N}e,$$

l'origine des arcs s et s_1 correspondant au point pour lequel e est nul; l'équation du rayon tangentiel est donc

$$(6)\qquad r = \mathrm{N}\sin a.$$

Les équations (5) et (6) donnent les coordonnées tangentielles de la courbe cherchée.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème. — *L'enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, ce point décrivant une courbe donnée, et le rapport des vitesses de rotation et de translation étant constant, est une roulette décrite par un point du cercle dont le diamètre est* N, *ce cercle roulant sur une courbe parallèle à la directrice et le point décrivant se trouvant sur cette dernière courbe à l'origine du mouvement.*

En effet, la dernière des équations (4) exprime qu'à partir de l'origine du mouvement le point de contact du cercle et de la courbe parallèle a parcouru sur les deux courbes des arcs égaux, et l'équation (6) exprime que le point de contact des deux courbes se projette sur l'extrémité de la corde r menée par le point du cercle diamétralement opposé au point de contact, cette corde formant avec la tangente au cercle un angle a.

Rayon de courbure. — Le rayon de courbure de l'enveloppe du rayon r s'obtient au moyen de l'équation (4) du n° 48, dans laquelle on remplace $\frac{dr}{d\varepsilon}$ par sa valeur tirée de l'équation (6) du présent numéro; or on a

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = \mathrm{N}\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}\cos a,$$

par suite, l'équation (4) du n° 48 donne la relation

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}}\cos a. \tag{7}$$

Construction du rayon de courbure. — Si l'on remarque que $\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}_1^2$ est le carré de la tangente menée du point de contact du cercle mobile avec la directrice au cercle de courbure de la parallèle, et que le rapport de ce carré à R exprime la projection de cette tangente sur le rayon de courbure de la directrice, on voit que le rayon de courbure $\mathcal{R}$ de l'enveloppe

s'obtient en projetant cette projection sur la normale à l'enveloppe. On obtient donc ainsi une construction simple du rayon de courbure $\mathcal{R}$ de cette enveloppe.

Rectification de l'enveloppe. — Remplaçons dans l'équation (4) du n° 48 $d\varepsilon$ par sa valeur $da + de$, nous obtenons l'équation

$$d\sigma = dr + \mathrm{N}\cos a\,da + \mathrm{N}\cos a\,de;$$

or, par suite de l'équation (6) du présent numéro, le deuxième terme du second membre de l'équation précédente est dr : on aura donc, en intégrant,

$$(8) \qquad \sigma = 2r + \mathrm{N}\int_0^e de\cos\left(\frac{\int \mathrm{R}_1\,de}{\mathrm{N}}\right),$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Quadrature de l'enveloppe. — La formule (3) du n° 46 donne, en opérant par rapport à $d\varepsilon$, comme nous venons de le faire,

$$du = \frac{1}{2}(\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)^2\left[\sin^2 a\,da + de\sin^2\left(\frac{\int \mathrm{R}_1\,de}{\mathrm{N}}\right)\right],$$

équation dans laquelle les variables sont aussi séparées.

Remarque. — Si, dans l'énoncé du problème IV que nous venons de résoudre, on suppose que la rotation du rayon mobile ait lieu en sens inverse, il suffira de changer le signe de N; la courbe parallèle $\frac{ds_1}{de} = \mathrm{R}_1$ est alors, dans le cas de notre figure, une courbe parallèle à la directrice, extérieure à cette courbe et à une distance $\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}$; les équations (5) et (6) donnent les coordonnées tangentielles d'une roulette décrite par un point du cercle dont le diamètre est $\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}$ qui roule sur la courbe parallèle à la directrice, intérieurement à cette courbe parallèle. Il est aisé de voir que les formules et les constructions précédentes sont générales et s'appliquent à cette nouvelle hypothèse.

Si l'on voulait avoir dans les formules des angles a_1 et ε_1 comptés en sens inverse, il faudrait poser

$$a = 2\pi - a_1, \quad \varepsilon = 2\pi - \varepsilon_1.$$

Corollaire I. — *L'enveloppe du rayon du cercle roulant mené au point décrivant est une seconde roulette.*

En effet (*fig.* 10), l'angle a_2 que fait ce rayon IM avec le rayon perpendiculaire au diamètre des contacts est $2a - \frac{\pi}{2}$; l'angle ε_2 que ce même rayon fait avec l'axe OX est $a_2 + e$: donc les équations (2) donnent

$$(2')\qquad R_1 de = \frac{N}{2} da_2, \quad N d\varepsilon_2 = (N + 2R_1) de;$$

or, si par le centre du cercle on mène une courbe parallèle à la directrice, en appelant ds_2 l'élément de l'arc de cette parallèle, on aura

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{2R_1 + N}{2R},$$

et, conséquemment, par suite des équations (2') du présent numéro, on aura

$$\frac{ds_2}{de} = \frac{2R_1 + N}{2}, \quad \frac{ds_2}{d\varepsilon_2} = \frac{N}{2}.$$

Le rapport $\frac{ds_2}{d\varepsilon_2}$ étant constant, le rayon mobile enveloppe une roulette engendrée par un point du cercle dont le diamètre est $\frac{N}{2}$, ce cercle roulant sur la même courbe parallèle à la directrice et le point décrivant se trouvant sur cette courbe parallèle à l'origine du mouvement.

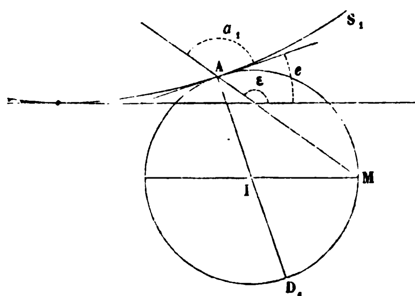
Corollaire II. — Il résulte de là que, lorsqu'un cercle roule sur une courbe, une droite quelconque du plan mobile de ce cercle enveloppe sur le plan fixe de la courbe une courbe parallèle à la roulette dont il vient d'être question.

56. Problème V. — *Enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, tandis que ce point décrit une courbe donnée s_1, la vitesse angulaire de la droite par rapport à la tan-*

gente à cette courbe et la vitesse de translation du point étant dans un rapport constant.

Coordonnées tangentielles. — Soient l'équation élémentaire

Fig. 11.



de la courbe s_1 (*fig.* 11) et l'équation des vitesses

$$(1) \qquad \frac{ds_1}{de} = R_1, \quad \frac{ds_1}{da_1} = D_1,$$

R_1 étant une fonction de e et D_1 une constante; on a la condition $\varepsilon = a_1 + e$; or, si l'on introduit l'auxiliaire ι telle que $\iota = R_1 + D_1$, on aura les relations

$$(2) \qquad \frac{de}{D_1} = \frac{da_1}{R_1} = \frac{d\varepsilon}{\iota}.$$

Si l'on intègre les équations (1) par la condition que l'arc s_1 soit nul en même temps que e, et qu'en ce point la droite mobile soit normale à la directrice, on aura les trois équations

$$(3) \qquad \begin{cases} s_1 = \int_0^e R_1 de, \quad s_1 = D_1\left(a_1 - \frac{\pi}{2}\right), \\ D_1\left(a_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^e R_1 de. \end{cases}$$

Cette dernière équation montre que, si l'on fait rouler un cercle dont le diamètre soit D_1 sur la directrice, la corde qui joint le point de contact à un point fixe de la circonférence du

cercle remplit les conditions de la droite mobile du problème, pourvu que le point fixe se trouve sur la normale à la directrice à l'origine du mouvement. Nous voyons donc que l'enveloppe de cette droite mobile n'est autre chose que la développée de la courbe étudiée dans le problème précédent; de là nous tirons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, tandis que ce point décrit une courbe* s_1 *par la condition que le rapport de la vitesse de translation du point à la vitesse angulaire de la droite par rapport à la directrice soit constant* D_1, *est la développée de l'enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, tandis que ce point décrit une courbe* s *parallèle à la courbe* s_1 *à la distance* D_1, *sous cette condition, que les vitesses de translation et de rotation soient dans un rapport constant* D_1.

L'équation du rayon tangentiel r_1 de l'enveloppe est la suivante :

$$\text{(4)} \qquad \frac{\sin a_1}{r_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{D_1}.$$

Rayon de courbure. — On peut l'obtenir de deux manières : ou bien en supposant que D_1 est constant dans la formule (6′) du n° 48, ou bien en prenant la dérivée de $\mathfrak{R}$ par rapport à e de la formule (7) du n° 55, en ayant égard aux équations (2) du présent numéro et à la relation $a + a_1 = \frac{\pi}{2}$; on trouve ainsi l'expression de $\mathfrak{R}_1$, rayon de courbure de la ligne s_1,

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{R}_1 = \frac{R_1}{v}\left(\frac{v^2 - R_1^2}{v}\right)\cos a_1 + \frac{R' D_1^3}{v^3}\sin a_1,$$

qui se construit facilement d'après la règle donnée dans le n° 48.

Rectification. — Soit $d\sigma_1$ l'élément de l'arc de l'enveloppe, l'équation (4) du n° 48, dans laquelle on supposera ds_1 égale à $D_1 da_1$, donnera, par une simple intégration, $(\sigma_1)_0$, $(r_1)_0$, $(a_1)_0$ étant les valeurs initiales de σ_1, r_1, a_1, la relation suivante :

$$\text{(6)} \qquad \sigma_1 - (\sigma_1)_0 = r_1 - (r_1)_0 + D_1[\sin a_1 - \sin(a_1)_0].$$

Quadrature. — Si, dans la formule (3) du n° 46, on remplace r_1 et ε par leurs valeurs tirées des équations (4) et (3) du présent numéro, on aura

$$(7) \qquad du = \frac{1}{2}\frac{R_1^2 D_1}{R_1 + D_1} de \cos^2\left(\frac{1}{D_1}\int_0^e R_1 de\right),$$

dans laquelle les variables sont séparées, puisque R_1 est une fonction connue de e.

57. Problème VI. — *Enveloppe d'une droite mobile autour d'un de ses points, tandis que ce point décrit une courbe donnée, les vitesses angulaires de la droite et de la tangente à la directrice étant dans un rapport dont la loi est donnée.*

Coordonnées tangentielles. — Soient l'équation élémentaire de la courbe et le rapport des vitesses

$$(1) \qquad \frac{ds}{de} = R, \quad \frac{d\varepsilon}{da} = \frac{1+m}{m},$$

R étant une fonction de e et m une fonction de a.

De ces deux équations et de la condition

$$\varepsilon = a + e,$$

on déduit

$$(2) \qquad s = \int_0^e R\,de, \quad da = m\,de, \quad d\varepsilon = (m+1)\,de.$$

La première équation (1) donne

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{R}{m+1} = \frac{r}{\sin a}, \quad \frac{ds}{da} = \frac{R}{m} = D;$$

et conséquemment

$$(3) \qquad r = \frac{R}{1+m}\sin a.$$

Cette dernière équation montre que le rayon de courbure de la directrice et la normale à cette courbe sont dans un rapport égal à $(1+m)$.

On voit, en se reportant au n° 45, que la courbe est la développée de l'enveloppe d'une droite située dans le plan de la courbe $\frac{ds}{da} = \frac{R}{m}$, pendant que cette courbe entraînant son plan roule sur la directrice, R étant exprimé en fonction de a, et a_1 l'angle que ds fait avec un axe fixe situé dans le plan mobile.

Rayon de courbure. — On trouve sans difficulté, en se reportant au n° 50,

$$(4)\quad \frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{mR}{(1+m)^2}\cos a + \frac{R'}{(1+m)^2}\sin a - \frac{mR\sin a\,\frac{dm}{da}}{(1+m)^3},$$

$$(6)\quad \mathfrak{R} = \left[1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right]R\cos a + \frac{1}{(1+m)^2}\left(R' - \frac{m\frac{dm}{da}}{1+m}R\right)\sin a,$$

que l'on peut écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$(6')\quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \left[1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right]R\cos a + \frac{m}{1+m}\frac{d}{da}\left(\frac{R}{1+m}\right)\sin a, \\ \mathfrak{R} = \left[1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right]R\cos a + \left[\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{R}{1+m}\right)\right]\sin a; \end{cases}$$

si m est constant, l'équation (6) devient

$$\mathfrak{R} = \left[1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right]R\cos a + \frac{1}{(1+m)^2}R'\sin a.$$

Or les équations (2) donnent, a_0 étant une constante, les relations

$$a - a_0 = me, \quad \varepsilon = (1+m)e + a_0, \quad m\varepsilon = (1+m)a - a_0;$$

conséquemment, si $R = f(e)$, on aura

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left[1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right]f\left(\frac{\varepsilon - a_0}{1+m}\right)\cos\left(\frac{m\varepsilon + a_0}{1+m}\right) + \frac{1}{(1+m)^2}f'_e\left(\frac{\varepsilon - a_0}{1+m}\right)\sin\left(\frac{m\varepsilon + a_0}{1+m}\right),$$

laquelle représente l'équation naturelle de l'enveloppe que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{(1+m)^2} \times\left[f\left(\frac{\varepsilon - a_0}{1+m}\right)\cos\left(\frac{m\varepsilon + a_0}{1+m}\right) + f'_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon - a_0}{1+m}\right)\sin\left(\frac{m\varepsilon + a_0}{1+m}\right)\right] + \frac{2m}{(1+m)^2} f\left(\frac{\varepsilon - a_0}{1+m}\right)\cos\left(\frac{m\varepsilon + a_0}{1+m}\right);$$

de là il résulte que, si la directrice est une cycloïde rapportée là a tangente en son sommet, on a

$$R = 2a\cos e,$$

et conséquemment

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2a}{(1+m)}\cos\varepsilon + \frac{2ma}{(1+m)^2}\cos\left[\frac{(m-1)\varepsilon + 2a_0}{1+m}\right].$$

Donc l'enveloppe est la résultante d'une cycloïde et d'une épicycloïde (*voir* n° 50). Si de plus $m = 1$, l'enveloppe est une développante de cycloïde.

Rectification. — On a l'équation suivante

$$\sigma - \sigma_0 = r - r_0 + \int_{a_0}^{a} \frac{R}{m}\cos a\, da,$$

dans laquelle σ_0, r_0, a_0 sont les valeurs initiales des variables σ, r, a.

58. Problème VII. — *Enveloppe d'une droite dont un point décrit une courbe donnée* $\left(\frac{ds}{de} = R\right)$ *par la condition que le rayon tangentiel de cette enveloppe soit la projection de l'ordre m du rayon de courbure de la courbe donnée sur la direction de la droite.*

Coordonnées tangentielles. — Les données de la question

sont les deux équations

$$(1)\quad \frac{ds}{de}=\mathrm{R},\quad r=\mathrm{R}\sin^m a\quad \text{ou bien}\quad \mathrm{N}=\mathrm{R}\sin^{m-1}a,$$

R étant une fonction de e, $\varphi(e)$.

On obtient, en opérant comme précédemment, les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & s=\int_0^e \mathrm{R}\,de,\quad de=\sin^{m-1}a\,d\varepsilon,\quad da=d\varepsilon(1-\sin^{m-1}a),\\ & e=\int_{a_0}^{a}\frac{\sin^{m-1}a\,da}{1-\sin^{m-1}a}.\end{aligned}\right.$$

Il résulte de ces équations que s et r sont connus en fonction de a.

Rayon de courbure. — On trouve sans difficulté

$$\mathcal{R}=\frac{1}{\sin a}\left[(1+m)r-m\frac{r^2}{\mathrm{R}\sin a}\right]\cos a+\mathrm{R}'\frac{r^2}{\mathrm{R}^2\sin^2\alpha}\sin a,$$

$$\mathcal{R}=\sin^{m-1}a\left\{[(1+m)-m\sin^{m-1}a]\,\mathrm{R}\cos a+\sin^{m-1}a\,\mathrm{R}'\sin a\right\}.$$

Le rayon de courbure $\mathcal{R}$ est donc la projection sur la normale à l'enveloppe de la somme des deux côtés d'un angle droit, dont les directions sont celles de R et de — R', et dont les longueurs sont égales aux coefficients du cosinus et du sinus dans l'équation que nous venons d'écrire.

Rectification. — On trouve l'équation suivante, dans laquelle les variables sont séparées

$$\sigma-\sigma_0=r-r_0+\int_{a_0}^{a}\varphi\left(\int_{a_0}^{a}\frac{\sin^{m-1}a\,da}{1-\sin^{m-1}a}\right)\frac{\sin^{m-1}a\cos a\,da}{1-\sin^{m-1}a},$$

qui ne dépend que des quadratures.

Cas particuliers. — Examinons les hypothèses suivantes :

1° $m=0$. Dans ce cas, on a les relations

$$\frac{ds}{de}=\frac{r}{\sin a},\quad \sin a=1,\quad r=\mathrm{R}.$$

L'enveloppe est donc la développée de la courbe donnée.

2° $m = 1$. Cette hypothèse donne les équations

$$r = R \sin a, \quad d\varepsilon = de, \quad a = \text{const.}$$

L'enveloppe est donc la développée oblique de la courbe.

3° $m = 2$. On obtient les équations

$$r = R \sin^2 a, \quad da = (1 - \sin a)\, d\varepsilon,$$

$$\mathcal{R} = \sin^2 a \left[\left(\frac{3}{\sin a} - 2 \right) R \cos a + R' \sin a \right].$$

Si l'on représente par ε_0 et a_0 deux valeurs correspondantes de ε et de a, la deuxième des équations précédentes étant intégrée donne les deux relations

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \cot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \cot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - a_0\right),$$

$$e - \varepsilon_0 + a = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - a_0)}{\sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - a_0\right)};$$

4° $m = 3$. Cette hypothèse donne les relations angulaires

$$d\varepsilon = \frac{da}{\cos^2 a}, \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\sin(a - a_0)}{\cos a \cos a_0}, \quad e - \varepsilon_0 = \frac{\sin(a - a_0)}{\cos a \cos a_0} - a,$$

et les relations linéaires

$$r = R \sin^3 a, \quad \mathcal{R} = \sin^3 a \left[\left(\frac{4}{\sin a} - 3 \sin a \right) R \cos a + R' \sin a \right);$$

5° $m = -1$. Dans ce cas, les relations angulaires sont, ε_0 correspondant à la valeur nulle de a,

$$d\varepsilon = -\frac{\sin^2 a\, da}{\cos^2 a}, \quad \varepsilon_0 - \varepsilon + a = \operatorname{tang} a, \quad \varepsilon_0 - e = \operatorname{tang} a,$$

et les relations linéaires sont

$$r \sin a = R, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\sin^4 a}(R \cos a + R' \sin a).$$

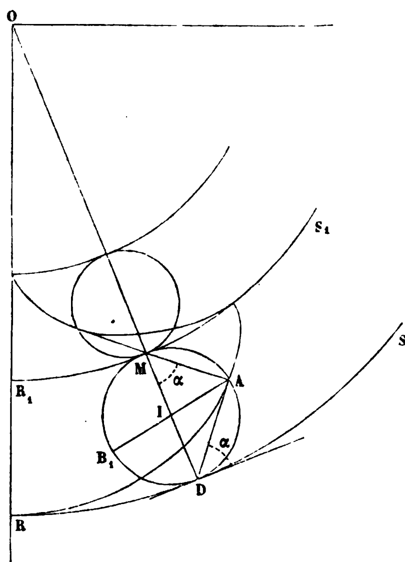
Il est inutile de poursuivre ces applications, qui ne présentent aucune difficulté, et qui conduisent à des expressions d'une construction simple.

§ II. — Des épicycloïdes et des hypocycloïdes.

59. *De l'épicycloïde.* — On appelle ainsi la courbe engendrée par un point de la circonférence d'un cercle roulant sur un autre cercle et extérieurement.

Si l'on suppose que, dans le n° 55, la courbe directrice est un cercle de rayon R, la courbe parallèle intérieure, dont le rayon de courbure sera $R_1 = R - N$, deviendra un cercle concentrique au premier. La courbe sera une épicycloïde décrite par le point A de la circonférence de cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}$ N,

Fig. 12.



roulant sur un cercle dont le rayon (*fig.* 12) est OR_1, le point décrivant A se trouvant en R à l'origine du mouvement.

Coordonnées tangentielles. — Elles sont données par les équations du n° 55

$$(1)\quad \begin{cases} s_1 = (R-N)e = Na, \quad s = Re = N\varepsilon, \quad Ra = R_1\varepsilon, \\ r = N\sin a, \quad AM = N\cos a. \end{cases}$$

Rayon de courbure. — Ce rayon est donné par l'équation

$$(2)\qquad \mathfrak{R} = \left(R - \frac{R_1^2}{R}\right)\cos a.$$

Équation élémentaire. — Elle peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$(3)\quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(R - \frac{R_1^2}{R}\right)\cos\frac{R_1}{R}\varepsilon, \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = N\frac{R+R_1}{R}\cos a.$$

Rectification. — L'intégrale de la première des équations (3) donne

$$(4)\quad \sigma = \frac{R^2 - R_1^2}{R_1}\sin\frac{R_1}{R}\varepsilon, \quad \sigma = N\frac{R+R_1}{R_1}\sin a, \quad \sigma = \frac{R+R_1}{R_1}r.$$

Quadrature. — La formule qu'on obtient pour exprimer la différentielle de l'aire balayée par le rayon tangentiel r est

$$du = \frac{1}{2}\frac{R}{R_1}(R-R_1)^2\sin^2 a\,da;$$

si on l'intègre, on obtient la relation

$$u = \frac{1}{2}\frac{R}{R_1}(R-R_1)^2(a - \cos a \sin a).$$

Or, si l'on remarque que $s_1 = Na$, cette équation peut s'écrire sous la forme suivante

$$(5')\qquad 2u = \frac{R}{R_1}Ns_1 - \frac{R}{R_1}\frac{R}{R+R_1}\mathfrak{R}r.$$

Il est facile de reconnaître que le rapport du rayon de courbure de la normale AM, que nous représentons par n, est

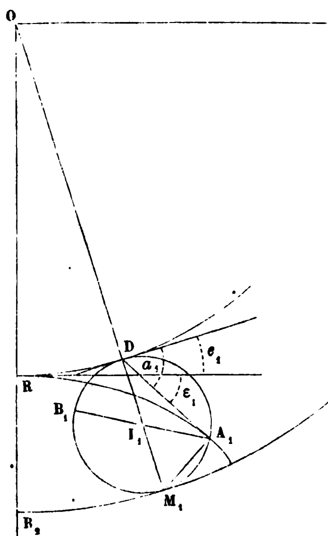
constant. Ainsi l'on a

$$(5) \qquad \frac{\mathcal{R}}{n} = \frac{R + R_1}{R} = \frac{\sigma}{r}.$$

De l'hypocycloïde. — C'est la courbe engendrée par un point de la circonférence d'un cercle roulant sur la concavité d'un autre cercle.

Si l'on suppose (*fig.* 13) que dans le n° 55 la courbe directrice est un cercle de rayon R, la courbe parallèle extérieure

Fig. 13.



sera un cercle concentrique de rayon R_2, tel que $R_2 = N + R$. Dans ce cas, la courbe enveloppe est une hypocycloïde décrite par le point A_1 de la circonférence d'un cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}N$, ce cercle roulant sur la concavité du cercle dont le rayon est R_2. Or, si on introduit les angles a_1, ε_1 comptés en sens inverse à partir des tangentes au cercle directeur au point D et au point R, qu'on appelle s_2 l'arc de cercle de

rayon R_2, et que dans l'hypocycloïde les grandeurs correspondant à celles que l'on a considérées dans l'épicycloïde soient représentées par les mêmes lettres affectées d'un indice augmenté d'une unité, on aura les équations suivantes :

Coordonnées tangentielles : $a_1 = e_1 + \varepsilon_1$

$$s_2 = R_2 e_1 = (R_2 - R) a_1, \quad s = R e_1 = (R_2 - R)\varepsilon_1, \quad R a_1 = R_2 \varepsilon_1,$$
$$r_1 = (R_2 - R)\sin a_1, \quad n_1 = (R_2 - R)\cos a_1.$$

Rayon de courbure.

$$\mathcal{R}_1 = \frac{R_2^2 - R^2}{R} \cos a_1.$$

Rectification.

$$\sigma_1 = \frac{R_2^2 - R^2}{R_2} \sin a_1, \quad \sigma_1 = \frac{R_2 + R}{R_2} r.$$

Équation naturelle.

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \frac{R_2^2 - R^2}{R} \cos \frac{R}{R_2} \varepsilon_1.$$

Quadrature.

$$2 \frac{R_2}{R} u_1 = (R_2 - R) s_2 - \frac{R}{R + R_2} R_1 r_1.$$

On voit que ce sont les mêmes formules que celles de l'épicycloïde dans lesquelles on aurait changé D, a, ε, en $-D_1$, $-a_1$, $-\varepsilon_1$.

Comparaison des épicycloïdes. — Si l'on considère deux épicycloïdes engendrées par des cercles quelconques roulant sur des cercles quelconques, on voit que, dans ces deux épicycloïdes, les mêmes grandeurs géométriques correspondant à un même angle donné a seront dans un rapport constant, quel que soit cet angle a.

Si le cercle générateur est le même, les coordonnées tangentielles, rayons tangentiels et normales correspondant au même angle auront même longueur.

Déformation de l'épicycloïde. — Si l'on élimine a entre les

équations qui donnent $\mathfrak{R}$ et σ, lesquelles sont

$$(7)\qquad R_1\sigma = N(R+R_1)\sin a,\quad R\mathfrak{R} = N(R+R_1)\cos a,$$

on obtiendra l'équation résultante

$$(8)\qquad R_1^2\sigma^2 + R^2\mathfrak{R}^2 = N^2(R+R_1)^2.$$

De là on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on développe l'épicycloïde sur la tangente à son sommet, le lieu des centres de courbure, après le développement est une conique.*

On trouve ce théorème dans Riccati.

Écrivons la valeur de n

$$(9)\qquad n = N\cos a,$$

et éliminons a entre cette équation et la première des équations (7), on obtient l'équation

$$R_1^2\sigma^2 + (R+R_1)n^2 = N^2(R+R_1)^2.$$

On déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si on développe l'épicycloïde sur la tangente à son sommet, le lieu des pieds des normales* N *après le développement est une conique.*

60. *Des développées successives de l'épicycloïde.* — Nous conservons pour représenter les lignes qui caractérisent une développée quelconque les lettres qui désignent les grandeurs correspondantes dans l'épicycloïde; mais, pour les distinguer, nous les affectons de l'accent qui marque le rang de la développée. Or on a

$$(1)\qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R} = \frac{R^2 - R_1^2}{R}\cos\frac{R_1}{R}\varepsilon;$$

donc, en opérant comme au n° 56, et en remarquant que

$\varepsilon' = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, on aura

$$(2) \qquad \frac{d\sigma'}{d\varepsilon'} = \mathfrak{R}' = \frac{R^2 - R_1^2}{R}\,\frac{R_1}{R}\cos\frac{R_1}{R}\varepsilon'.$$

On conclut de là que la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde décrite par un cercle dont le diamètre est $\frac{R_1}{R}(R - R_1)$, qui roule sur la convexité du cercle concentrique au cercle R_1, et ayant pour rayon $\frac{R_1^2}{R}$. Cette épicycloïde est tangente en son sommet au cercle R_1, et ce sommet coïncide avec le point de rebroussement de l'épicycloïde proposée.

D'après cela, on voit que la $n^{\text{ième}}$ développée est donnée par l'équation élémentaire

$$(3) \qquad \frac{d\sigma^{(n)}}{d\varepsilon^{(n)}} = \mathfrak{R}^{(n)} = \frac{R^2 - R_1^2}{R}\left(\frac{R_1}{R}\right)^n \cos\frac{R_1}{R}\varepsilon^{(n)}.$$

C'est une épicycloïde donnée par un cercle dont le diamètre est $\left(\frac{R_1}{R}\right)^n (R - R_1)$, roulant sur un cercle concentrique au cercle R_1, et ayant pour rayon $\frac{R_1^{n+1}}{R^n}$; elle est tangente en son sommet au cercle qui a pour rayon $\frac{R_1^n}{R^{n-1}}$.

Relations entre les rayons de courbure des développées successives. — Si l'on exprime ε, ε', ε'' en fonction de a, on aura les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \dfrac{R^2 - R_1^2}{R}\cos a, \\[2ex] \mathfrak{R}' = -\dfrac{R^2 - R_1^2}{R}\,\dfrac{R_1}{R}\sin a, \\[2ex] \mathfrak{R}'' = -\dfrac{R^2 - R_1^2}{R}\,\dfrac{R_1^2}{R^2}\cos a. \end{cases}$$

Si l'on élimine a entre la première et chacune des deux

autres, on obtient

$$R_1^2 \mathfrak{R}^2 + R^2 \mathfrak{R}'^2 = (R^2 - R_1^2)^2 \frac{R_1^2}{R^2};$$

on obtient aussi

$$R^2 \mathfrak{R}'' + R_1^2 \mathfrak{R} = 0.$$

La première est l'équation d'une conique par rapport aux variables $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$; la seconde l'équation d'une droite par rapport aux variables $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}''$.

§ III. — Des développées obliques de l'épicycloïde.

Coordonnées tangentielles. — Soit β l'inclinaison du rayon de courbure inclinée ρ sur la tangente à l'épicycloïde, les coordonnées tangentielles seront, d'après le n° 53,

$$(5) \qquad \sigma = \frac{R + R_1}{R_1} \cos \frac{R_1}{R} \varepsilon, \qquad \rho = \frac{R^2 - R_1^2}{R} \cos \frac{R_1}{R} \varepsilon \sin \beta.$$

Rayon de courbure ι. — Si l'on porte les valeurs de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{R}'$ que nous venons de trouver dans la formule (3) du n° 53, on obtient l'équation suivante :

$$(6) \qquad \iota = \frac{R^2 - R_1^2}{R} \left(\cos\beta \cos \frac{R_1}{R} \varepsilon - \frac{R_1}{R} \sin\beta \sin \frac{R_1}{R} \varepsilon \right);$$

or, si l'on pose

$$R_1 \operatorname{tang} \beta = R \operatorname{tang} \psi,$$

on obtient la nouvelle expression de ι

$$(6') \quad \iota = \frac{R^2 - R_1^2}{R^2} (R_1^2 \sin^2\beta + R^2 \cos^2\beta)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\psi + \frac{R_1}{R} \varepsilon \right).$$

Soit η l'angle que le rayon de courbure inclinée ρ fait avec l'axe fixe, on a $\eta = \beta + \varepsilon$; conséquemment l'angle placé sous le signe cosinus devient

$$\left(\psi - \frac{R_1}{R} \beta \right) + \frac{R_1}{R} \eta;$$

de là résulte ce théorème :

Théorème. — *La développée oblique sous l'angle* β *d'une épicycloïde est une épicycloïde.*

Si l'on veut rapporter cette épicycloïde à la tangente à son sommet et à deux cercles concentriques, M étant le rayon du cercle intérieur, L le rayon du cercle extérieur, on posera (η_1 est l'angle du rayon tangentiel avec la tangente au sommet)

$$(6'') \qquad \iota = \left(L - \frac{M^2}{L}\right) \cos \frac{M}{L} \eta_1 ;$$

l'identification de cette équation avec l'équation (6) donnera

$$\psi + \frac{R_1}{R} \varepsilon = \frac{M}{L} \eta_1, \quad L = \sqrt{R_1^2 \sin^2\beta + R^2 \cos^2\beta},$$

$$M = \frac{R_1}{R} \sqrt{R_1^2 \sin^2\beta + R^2 \cos^2\beta}.$$

Les rayons des deux cercles M et L sont donc déterminés, et conséquemment le diamètre du cercle roulant sera

$$\frac{R - R_1}{R} \sqrt{R_1^2 \sin^2\beta + R^2 \cos^2\beta}.$$



CHAPITRE IV.

NOUVELLES COORDONNÉES TANGENTIELLES. SYSTÈME INVERSE.

§ I. — Formules générales.

61. *Définitions.* — Supposons qu'une courbe *mn* soit donnée. Si par un point A de cette courbe on mène une tangente à cette courbe, et que l'on prenne sur cette tangente, à partir du point A et dans un sens convenu, une longueur variant d'après une loi donnée avec l'angle que fait la tangente au point A avec une tangente initiale au point A_1 menée à la même courbe, l'extrémité de cette longueur engendrera une courbe PQ, lorsque A prendra toutes les positions possibles sur la courbe *mn*. La courbe *mn* sera quelquefois appelée *courbe des pôles*, et la courbe PQ la courbe *polaire*.

La longueur comptée sur la tangente à partir de son point de contact avec la courbe *mn* est le *rayon tangentiel* (40) r; il est positif ou négatif suivant qu'on le compte sur la tangente d'un côté ou de l'autre à partir du point A.

L'angle qui fait la partie positive du rayon tangentiel en un point A de la courbe des pôles avec une direction fixe A_1B_1 sera appelé *angle polaire* et constamment représenté par ε.

Un point quelconque du plan de la courbe *mn* sera déterminé par des valeurs convenables de ε et de r. Ces deux grandeurs seront donc les *coordonnées du point*.

Si l'on représente par σ l'arc de la courbe *mn*, compté à partir d'une origine fixe et par $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \psi'(\varepsilon)$ l'équation élémentaire de cette courbe, l'arc σ sera déterminé par la valeur de l'angle polaire ε.

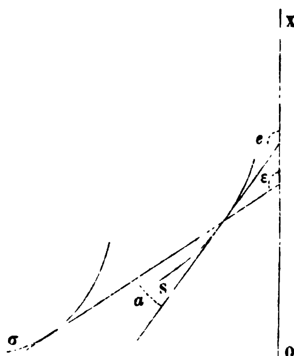
L'équation élémentaire de la courbe des pôles étant donnée, l'équation de la courbe polaire, dans le nouveau système coor-

donnée, sera une relation entre r et ε :

$$r = f(\varepsilon).$$

62. *Équations différentielles de la courbe polaire* (*fig.* 14). — Il est facile de voir que le présent système des coordonnées

Fig. 14.



est l'inverse du système dont nous nous sommes occupé dans le Chapitre III. Les équations différentielles de la courbe polaire, par rapport à la courbe des pôles, seront les mêmes que celles que nous avons trouvées dans le n° 46, dans lesquelles la courbe directrice se confond avec la courbe polaire que nous venons de définir; en conservant donc les mêmes conventions et les mêmes notations du n° 46, nous transcrivons les formules (1) de ce numéro

$$(1)\qquad \sin a = \frac{r\,d\varepsilon}{ds}, \qquad \cos a = \frac{dr + d\sigma}{ds}, \qquad \cot a = \frac{d(r+\sigma)}{r\,d\varepsilon},$$

dans lesquelles σ est compté en sens inverse, et l'angle a à partir de l'autre côté de la tangente à la courbe des pôles.

Différentielle de l'arc de la courbe polaire. — Si l'on forme le carré des deux premières équations (1) et qu'on ajoute, on trouve l'équation

$$(2)\qquad ds^2 = \left[r^2 + \frac{d(r+\sigma)^2}{d\varepsilon^2}\right] d\varepsilon^2 = \left[r^2 + \left(\mathfrak{R} + \frac{dr}{d\varepsilon}\right)^2\right] d\varepsilon^2,$$

r et σ étant des fonctions de ε; la différentielle ds se trouve exprimée en fonction de cette variable, et une intégration donnera la rectification de la courbe polaire.

Tangente, sous-tangente.— La tangente T est le segment de la touchante à la courbe polaire, compris entre le point de contact et la perpendiculaire au rayon tangentiel menée par le pôle; la sous-tangente S_t est la projection de ce segment sur la perpendiculaire; on a pour l'expression de ces lignes

$$(3)\qquad T = \frac{r}{\cos a} = \frac{r\,ds}{d(r+\sigma)},\quad S_t = r\tang a = \frac{r^2\,d\varepsilon}{d(r+\sigma)}.$$

Normale, sous-normale.— La longueur N de la normale à la courbe polaire est le segment déterminé sur la normale à la courbe polaire par la perpendiculaire au rayon tangentiel menée par le pôle. La sous-normale S_n est la projection de ce segment sur cette perpendiculaire. Les expressions de ces lignes sont

$$(4)\qquad N = \frac{r}{\sin a} = \frac{ds}{d\varepsilon},\quad S_n = r\cot a = \frac{d(r+\sigma)}{d\varepsilon}.$$

63. *Rayon de courbure.* — Dans le cas présent, la formule (2) du n° 46 devient

$$(5)\qquad de = d\varepsilon + da;$$

divisant par ds, et remplaçant les deux premiers termes par leurs valeurs, on a la relation

$$(6)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\sin a}{r} + \frac{da}{ds}.$$

Remarquons que, d'après l'équation (4) du n° 48, on a

$$r\cot a = \mathfrak{R} + \frac{dr}{d\varepsilon};$$

or, si l'on différentie et qu'on élimine ds du second membre au moyen de la première des équations (1) du n° 62, on a la

relation

$$(7)\qquad -\frac{da}{ds}=\frac{\sin^3 a}{r}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(\mathfrak{R}+\frac{dr}{d\varepsilon}\right)\right].$$

On aura donc cette première expression de la courbure de la courbe polaire

$$(6')\qquad \frac{1}{R}=\frac{\sin a}{r}-\frac{\sin^3 a}{r}\frac{d}{d\varepsilon}\left[r\left(\mathfrak{R}+\frac{dr}{d\varepsilon}\right)\right];$$

si l'on élimine a entre cette équation et celle précédemment posée, on aura l'équation

$$(6'')\qquad \frac{1}{R}=\frac{r^2+\left(\mathfrak{R}+\frac{dr}{d\varepsilon}\right)\left(\mathfrak{R}+\frac{2\,dr}{d\varepsilon}\right)-r\left(\mathfrak{R}'+\frac{d^2 r}{d\varepsilon^2}\right)}{\left[r^2+\left(\mathfrak{R}+\frac{dr}{d\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle le second membre s'exprime immédiatement en fonction de l'angle polaire ε.

Il est inutile de remarquer que, si la courbe des pôles se réduit à un point, alors on obtient le rayon de courbure d'une courbe en fonction des coordonnées polaires.

Différentielle de l'aire. — L'aire balayée par le rayon tangentiel a pour différentielle une des expressions calculées des nos 46 et 48.

Nouvelles formes de la courbure. — Si de l'équation

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin a}{r}+\frac{da}{ds}$$

on élimine ds au moyen de la deuxième des équations (1) du n° 62, on trouvera

$$(6''')\qquad \frac{1}{R}=\frac{d(r\sin a)}{r\,d(r+\sigma)}+\frac{\sin a\,d\sigma}{d(r+\sigma)}.$$

Or, en ayant égard à la troisième des équations (1), on trou-

vera les relations

$$(6^{\text{iv}})\quad \frac{1}{R}-\frac{\mathfrak{R}}{r^2}\frac{\sin^2 a}{\cos a}=\frac{d(r\sin a)}{rd(r+\sigma)},\quad \frac{1}{R}-\frac{\mathfrak{R}}{N^2\cos a}=\frac{d(r\sin a)}{rd(r+\sigma)}.$$

2° L'équation (6) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(6^{\text{v}})\qquad \frac{1}{R}=\frac{\dfrac{1+\cot^2 a}{r}-\dfrac{d\cot^2 a}{2(dr+d\sigma)}}{(1+\cot^2 a)^{\frac{3}{2}}};$$

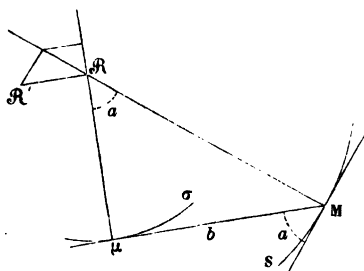
il suffit d'éliminer de l'équation (6′) $\mathfrak{R}$ et $d\varepsilon$ au moyen de la troisième et de la première des équations (1). On trouvera de même les expressions suivantes de la normale et de la tangente :

$$T=r\frac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a},\quad N=r\sqrt{1+\cot^2 a}.$$

§ II. — Des courbes dont la tangente jouit d'une propriété donnée.

64. Problème I. — *Étant donnée une courbe (fig. 15) $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ étant une fonction de ε, on prend sur les différentes tan-*

Fig. 15.



gentes, à partir des points de contact, des longueurs constantes égales à b, lieu des extrémités de ces longueurs.

Tangente. — Les données sont

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \psi'(\varepsilon), \quad r = b. \tag{1}$$

La troisième des équations (1) du n° 62 donne

$$b = \mathfrak{R} \operatorname{tang} a. \tag{2}$$

Cette équation donne la tangente à la courbe polaire; elle montre que l'hypoténuse du triangle rectangle, dont les deux côtés sont $\mathfrak{R}$ et b, est la normale à cette courbe.

Rayon de courbure. — Si l'on a égard aux équations précédentes, la formule (6') du n° 63 devient

$$\frac{1}{R\cos a} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{\sin a \cos a \mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}^2}. \tag{3}$$

Or $\sin a \cos a \mathfrak{R}'$ est la longueur que l'on obtient en projetant $\mathfrak{R}'$ sur la direction de la normale à la courbe polaire, et cette projection sur la normale à la courbe des pôles; le dernier terme de l'équation précédente est donc l'inverse de la troisième proportionnelle à $\mathfrak{R}$ et à cette projection.

Soit μc cette troisième proportionnelle comptée à partir du pôle μ sur la normale à la courbe des pôles, $\mu\mathfrak{R}_1$ le double de son rayon de courbure, et μR_1 la projection de la projection du rayon de courbure R sur cette normale. L'équation précédente devient

$$\frac{2}{\mu\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mu R_1} + \frac{1}{\mu c}. \tag{3'}$$

Donc les quatre points μ, $\mathfrak{R}_1$, R_1, c forment une proportion harmonique : ce qui donne la construction du rayon de courbure de la courbe polaire.

Si l'on veut exprimer le rayon de courbure en fonction de l'angle polaire ε, on fera usage de la formule (6'') du n° 63, et on trouvera l'expression

$$\frac{1}{R} = \frac{b^2 + \overline{\psi'(\varepsilon)}^2 - b\psi''(\varepsilon)}{\left(b^2 + \overline{\psi'(\varepsilon)}^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Théorèmes résultants. — Soit N la normale à la courbe polaire, on a $N^2 = b^2 + \mathfrak{R}^2$, et l'équation (7) du même numéro donne

$$(5) \qquad \frac{da}{ds} = \frac{\mathfrak{R}' \sin a}{N^2};$$

si l'on se reporte aux théorèmes du n° 50, on tire de cette équation la proposition suivante : *Si l'on faisait rouler sur la courbe polaire une courbe dont le rayon de courbure serait une troisième proportionnelle à* N *et à la projection de* $\mathfrak{R}'$ *sur la normale à la polaire, la droite, déterminée dans le plan de la courbe roulante, de manière à être perpendiculaire, dans une position initiale, à la tangente de la courbe polaire, aurait pour enveloppe une développante de la courbe des pôles.*

On voit aussi qu'il en résulte ce théorème : *Si, par le point de contact de la tangente à la courbe des pôles, on élève une normale, et que, la normale et la tangente formant un système rigide, la normale roule sans glisser sur la développée de la courbe des pôles, l'extrémité de la tangente engendrera la courbe que nous étudions.*

Il résulte encore de là cette troisième proposition : *Un point* A, *pris dans le plan de ces deux droites, engendre une courbe de même espèce que la courbe étudiée.*

En effet, de ce point, abaissons une perpendiculaire à la normale; le pied de cette perpendiculaire engendrera, par rapport à cette courbe parallèle, le lieu des extrémités des tangentes de longueur donnée.

Quadrature. — L'une des formules du n° 46 donne

$$du = \frac{1}{2} b^2 d\varepsilon;$$

d'où l'on tire l'équation

$$(6) \qquad u - u_0 = \frac{1}{2} b^2 (\varepsilon - \varepsilon_0).$$

L'aire balayée par le rayon tangentiel est égale à l'aire d'un secteur circulaire dont le rayon est b, et l'angle $(\varepsilon - \varepsilon_0)$: ce qui est conforme aux formules du n° 44.

Rectification. — La différentielle de l'arc est donnée par la formule

$$(7) \qquad ds^2 = (r^2 + \mathfrak{R}^2)d\varepsilon^2,$$

laquelle dépend de la nature de la fonction de ε qui donne la valeur de $\mathfrak{R}$.

Équation élémentaire de la courbe. — Elle s'obtient en remplaçant dans l'équation précédente, ou bien dans l'équation qui donne le rayon de courbure, ε par sa valeur en fonction de e; or on a la relation

$$a = \operatorname{arc}\left[\cot = \frac{\psi'(\varepsilon)}{b}\right],$$

et par suite

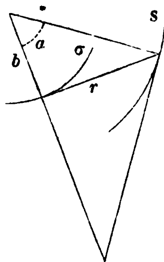
$$(8) \qquad e = \varepsilon + \operatorname{arc}\left[\cot = \frac{\psi'(\varepsilon)}{b}\right];$$

ε est donc connu en fonction de e.

65. Problème II. — *La courbe des pôles est donnée; trouver la polaire telle, que sa sous-normale soit constante.*

Coordonnées tangentielles. — Soit b la sous-normale (*fig.* 16);

Fig 16.



les données de la question sont

$$(1) \qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}, \quad r = b \operatorname{tang} a.$$

La première donne la rectification de la courbe; car si on l'intègre, et que σ_0 soit la valeur de σ correspondant à la valeur nulle de ε, on trouve

$$(2)\qquad \sigma - \sigma_0 = \int_0^{\varepsilon} \mathfrak{R}\, d\varepsilon.$$

La troisième des équations (1) du n° 62 devient

$$(3)\qquad d(r + \sigma) = b\, d\varepsilon;$$

or on obtient par intégration

$$r - r_0 + \sigma - \sigma_0 = b\varepsilon,$$

$$(4)\qquad r - r_0 = b\varepsilon - \int_0^{\varepsilon} \mathfrak{R}\, d\varepsilon, \quad \frac{dr}{d\varepsilon} = (b - \mathfrak{R}).$$

Les valeurs de σ et de r sont donc connues en fonction de ε.

La construction de la tangente se déduit de la seconde des équations proposées.

Rayon de courbure. — Si l'on différentie la deuxième des équations proposées, et qu'on ait égard à la deuxième des équations (1) du n° 62, laquelle devient, par suite de l'équation (3) du présent numéro,

$$b\, d\varepsilon = ds \cos a,$$

on trouve les relations

$$(5)\qquad \frac{da}{ds} = \frac{\cos^3 a}{b^2}(b - \mathfrak{R}), \quad \frac{1}{D} = \frac{b(b - \mathfrak{R})}{N^3}.$$

On déduit de là la construction suivante : *Par l'extrémité du segment $b - \mathfrak{R}$, menez une parallèle au rayon tangentiel, elle détermine sur* N *un segment tel que la troisième proportionnelle entre* N *et ce segment sera la longueur* D, *cette longueur ayant son origine au point m pris sur la courbe polaire.*

La proportion harmonique détermine le centre de courbure, par une construction analogue à celle du numéro précédent.

L'équation du rayon de courbure est, d'après la formule (6')

du n° 63,

$$(6') \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos a}{b} + \frac{\cos^3 a}{b^2}(b - \mathfrak{R}),$$

et d'après la formule (6″) du même numéro,

$$(6'') \qquad \frac{1}{R} = \frac{r^2 + b^2 + b(b - \mathfrak{R})}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les différentielles de l'arc et de l'aire sont données par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} ds = d\varepsilon \sqrt{b^2 + \left(r_0 + b\varepsilon - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon\right)^2}, \\ du = \frac{1}{2}\left(r_0 + b\varepsilon - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon\right)^2 d\varepsilon, \end{cases}$$

dans lesquelles les variables sont séparées.

66. Problème III.— *La courbe des pôles est donnée ; trouver la polaire telle, que la sous-normale soit dans un rapport constant avec la somme du rayon tangentiel et de l'arc de la courbe des pôles.*

Coordonnées du point. — Les données de la question sont

$$(1) \qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}, \quad S_n = \frac{d(r + \sigma)}{d\varepsilon} = m(r + \sigma),$$

m étant une constante. On déduit de ces équations les suivantes :

$$(2) \qquad \sigma - \sigma_0 = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon, \quad r + \sigma = (r_0 + \sigma_0)E^{m\varepsilon},$$

E étant la base des logarithmes népériens, r_0 et σ_0 les valeurs de r et de σ qui correspondent à la valeur nulle de ε. Ces équations donnent les coordonnées tangentielles en fonction de l'angle polaire ε.

La construction de la normale est donnée par la seconde des équations proposées.

Rayon de courbure. — Les équations (1) du n° 62 donnent les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} ds\cos a = m(r+\sigma)\,d\varepsilon, \quad \tang a = \dfrac{r}{m(r+\sigma)}, \\ \dfrac{m(r+\sigma)}{\cos a} = \dfrac{r}{\sin a} = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Si l'on différentie la seconde et que l'on divise le résultat par la première, on trouve les deux relations

$$(4)\quad \frac{da}{ds} = \frac{\cos^3 a}{m^2(r+\sigma)^2}(m\sigma - \mathfrak{R}), \qquad \frac{1}{\mathrm{D}} = \frac{\cos a}{\mathrm{N}^2}(m\sigma - \mathfrak{R}),$$

et, par suite, l'équation du rayon de courbure prend l'une des deux formes suivantes :

$$(6)\quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sin a}{r} + \frac{\cos^3 a}{m^2(r+\sigma)^2}(m\sigma - \mathfrak{R}),$$

$$(6')\quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sin a}{r} + \frac{\sin^2 a\cos a}{r^2}(m\sigma - \mathfrak{R}).$$

Les différentielles de l'arc et de l'aire sont :

$$(7)\quad ds = d\varepsilon\sqrt{(r_0+\sigma_0)^2 m^2 \mathrm{E}^{2m\varepsilon} + \left[(r_0+\sigma_0)\mathrm{E}^{m\varepsilon} - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right]^2},$$

$$(8)\quad du = \frac{1}{2}\left[(r_0+\sigma_0)\mathrm{E}^{m\varepsilon} - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right]^2 d\varepsilon,$$

dans lesquelles les variables sont séparées.

§ III. — Des développantes des courbes.

67. Problème IV. — *Étant donnée la courbe* $\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$, *trouver ses développantes.*

Supposons qu'un fil attaché par son extrémité à l'origine de l'arc d'une courbe s'enroule sur cette courbe dans le sens des arcs positifs, sa longueur étant b, l'extrémité de ce fil engendre la développante. Les données de la question seront donc

$$(1)\qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}, \quad r + \sigma = b.$$

On déduit de ces équations les coordonnées de la développante dans le nouveau système tangentiel; ces coordonnées sont

$$(2)\qquad \sigma = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon, \quad r = b - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon.$$

On déduit des équations (1) du n° 62 les suivantes :

$$(3)\qquad \cos a = 0, \quad r = \mathrm{R} = \mathrm{N}, \quad e = \frac{\pi}{2} + \varepsilon;$$

les propositions suivantes en dérivent :

1° *La développante est normale au rayon tangentiel;*

2° *La normale à cette courbe, le rayon tangentiel et le rayon de courbure se confondent en une seule et même ligne droite.*

La rectification et la quadrature de la développante sont données par les deux équations

$$(4)\qquad s = b\varepsilon - \int_0^\varepsilon d\varepsilon \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon, \quad u = \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \left(b - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\, d\varepsilon\right)^2 d\varepsilon.$$

L'équation élémentaire de la développante est

$$(5)\qquad \frac{ds}{de} = b - \int_0^{e-\frac{\pi}{2}} \mathfrak{R}\, de.$$

68. Problème V. — *Trouver les développantes d'un ordre quelconque.*

Si l'on prend la développante de la développante d'une courbe, on aura la développante du second ordre de cette

courbe. Si l'on prend la développante de la développante de l'ordre $n-1$, on aura la développante de l'ordre n.

Dans ce qui va suivre, nous conserverons, pour représenter les lignes qui caractérisent une développante d'un ordre quelconque, les lettres qui désignent les grandeurs correspondantes dans la courbe proposée; mais, pour les distinguer, nous les affecterons de l'indice qui marque le rang de la développante.

D'après cela, nous aurons les équations suivantes :

$$(1)\quad \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_{n-1}, \quad \mathfrak{R}_n d\varepsilon = d\sigma_n, \quad r_n + \sigma_n = b_n, \quad r_{n-1} = \mathfrak{R}_n.$$

On déduit de ces équations les coordonnées des développantes successives dans le système tangentiel inverse, l'exposant affectant le signe $\int$ indiquant une intégration multiple marquée par le nombre d'unités contenues dans cet exposant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon,\\
\sigma_1 &= -\left(\int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right)^2 + b\varepsilon,\\
\sigma_2 &= \left(\int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right)^3 - b_1\varepsilon + \frac{1}{2}b\varepsilon^2;\\
r &= \mathfrak{R}_1 = -\int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon + b,\\
r_1 &= \mathfrak{R}_2 = \left(\int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right)^2 + b_1 - b\varepsilon,\\
r_2 &= \mathfrak{R}_3 = -\left(\int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon\right)^3 + b_2 - b_1\varepsilon + \frac{1}{2}b\varepsilon^2;
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$b_{n-1}\varepsilon - \frac{1}{2}b_{n-2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}b_{n-3}\varepsilon^3 - \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}b_0\varepsilon^n = \mathrm{F}_n(\varepsilon),$$

les coordonnées de la développante de l'ordre $n+1$ seront

$$(2')\quad \begin{cases} \sigma_n = (-1)^n \left[F_n(\varepsilon) + \left(\int_0^\varepsilon \mathcal{R}\, d\varepsilon \right)^{n+1} \right], \\ r_n = \mathcal{R}_{n+1} = (-1)^{n+1} \left[F_n(\varepsilon) + \left(\int_0^\varepsilon \mathcal{R}\, d\varepsilon \right)^{n+1} \right] + b_n; \end{cases}$$

l'équation élémentaire de la développante $(n+1)$ sera donc

$$\frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = b_n + (-1)^{n+1} \left[F_n\left(\varepsilon_{n+1} - \frac{(n+1)\pi}{2} \right) + \left(\int_0^{\varepsilon_{n+1} + \frac{(n+1)}{2}\pi} \mathcal{R}\, d\varepsilon_{n+1} \right)^{n+1} \right].$$

Les coordonnées rectangles de la développante de l'ordre $(n+1)$ s'obtiennent de la manière suivante. Concevons la ligne polygonale formée par la suite des rayons de courbure, depuis $\mathcal{R}_1$ jusqu'à $\mathcal{R}_{n+1}$, et projetons cette ligne polygonale sur deux axes dont l'un coïnciderait avec l'axe des X, et dont l'autre serait la normale à l'origine à la courbe proposée. Si x, y sont les coordonnées du point pris sur la courbe et x_{n+1}, y_{n+1} les coordonnées correspondantes de la développante $(n+1)^{\text{ième}}$, on aura les équations

$$(4)\quad x_{n+1} - x = \sum_0^n \mathcal{R}_{k+1} \sin\varepsilon_k, \quad y_{n+1} - y = \sum_0^n \mathcal{R}_{k+1} \cos\varepsilon_k,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de k, depuis o jusqu'à n; or on a les relations

$$\sin\varepsilon_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_{n-1} \right) = \cos\varepsilon_{n-1},$$

$$\cos\varepsilon_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_{n-1} \right) = -\sin\varepsilon_{n-1};$$

les deux équations (4) s'écriront donc sous l'une des deux formes suivantes, suivant que les développements seront

d'ordre pair ou impair :

$$(4')\quad\begin{cases} x_{2n'+1} - x = \sin\varepsilon\sum_{0}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k+1} - \cos\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k}, \\ y_{2n'+1} - y = \cos\varepsilon\sum_{0}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k+1} + \sin\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k}; \end{cases}$$

$$(4'')\quad\begin{cases} x_{2n'} - x = -\sin\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k-1} - \cos\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k}, \\ y_{2n'} - y = -\cos\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k-1} + \sin\varepsilon\sum_{1}^{n'}(-1)^k\mathfrak{R}_{2k}. \end{cases}$$

Or, dans ces formules, les valeurs de x et y sont données par les valeurs

$$(5)\qquad x = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\cos\varepsilon\,d\varepsilon,\quad y = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\sin\varepsilon\,d\varepsilon;$$

les coordonnées x_{n+1}, y_{n+1} sont donc exprimées en fonction d'une seule variable ε.

69. *Applications des formules précédentes. — Développantes du cercle* $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = m$.

Développante première. — Coordonnées dans le système tangentiel. — Elles sont données par les équations

$$(1)\qquad r = b - m\varepsilon,\quad \sigma = m\varepsilon.$$

Équation élémentaire.

$$(2)\qquad \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = b - m\left(\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Rectification. — Elle est donnée par l'intégrale de cette der-

nière équation. Cette intégrale est

$$(3) \qquad \sigma_1 = b\varepsilon - \frac{1}{2} m\varepsilon^2.$$

Quadrature. — Elle dépend de l'équation

$$(4) \qquad u = -\frac{1}{6m}[(b - m\varepsilon)^3 - b^3].$$

Coordonnées rectangles. — Elles dépendent des deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = (b - m\varepsilon)\sin\varepsilon - m\cos\varepsilon, \\ y_1 - b = (b - m\varepsilon)\cos\varepsilon + m\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Développante seconde du cercle. — *Coordonnées dans le système tangentiel.* — Les équations de ce système sont

$$(6) \qquad r_1 = \mathfrak{R}_2 = b_1 - b\varepsilon + \frac{1}{2} m\varepsilon^2, \quad \sigma_1 = b\varepsilon - \frac{1}{2} m\varepsilon^2.$$

Rectification. — Elle est donnée par l'équation

$$(7) \qquad \sigma_2 = b_1\varepsilon - \frac{1}{2} b\varepsilon^2 + \frac{1}{6} m\varepsilon^3.$$

Quadrature. — Elle dépend de l'équation suivante :

$$(8) \qquad u_2 = \frac{1}{2} b_1^2\varepsilon - bb_1\varepsilon^2 + \frac{1}{3}(b^2 + b_1 m)\varepsilon^3 - \frac{1}{4} bm\varepsilon^4 + \frac{1}{20} m^2\varepsilon^5.$$

Coordonnées rectangles. — Enfin les coordonnées rectangles sont

$$(9) \qquad \begin{cases} x_2 - x = \mathfrak{R}_1 \sin\varepsilon + \mathfrak{R}_2 \cos\varepsilon, \\ y_2 - y = \mathfrak{R}_1 \cos\varepsilon - \mathfrak{R}_2 \sin\varepsilon. \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} x = m\sin\varepsilon, \\ y = -m\cos\varepsilon + m. \end{cases}$$

Il est inutile de multiplier les applications qui ne présentent aucune difficulté.

§ IV. — Des développantes obliques.

70. Problème VI. — *Étant donnée la courbe* $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$, *trouver ses développantes obliques sous l'angle a.*

Équations tangentielles de la développante. — Les données sont :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}, \quad a = \text{const.} \tag{1}$$

Les équations (1) du n° 62 donnent, dans le cas actuel, les relations

$$de = d\varepsilon, \quad r = \mathrm{R}\sin a, \quad \frac{dr}{d\varepsilon} - r\cot a + \mathfrak{R} = 0. \tag{2}$$

Intégrant l'équation élémentaire de la courbe des pôles, ainsi que l'équation différentielle précédente, on obtient les coordonnées

$$\sigma = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon, \quad r = \mathrm{E}^{\varepsilon\cot a}\left(r_0 - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,\mathrm{E}^{-\varepsilon\cot a}\,d\varepsilon\right). \tag{3}$$

Tangentes à la développante oblique. — Les équations précédentes font connaître r correspondant à un point quelconque de la courbe des pôles. La droite faisant un angle a avec r et passant par l'extrémité de cette ligne est la tangente à la développante oblique sous l'angle a.

Rayon de courbure à la développante oblique. — La projection du rayon de courbure sur le rayon tangentiel est égale à ce rayon. Donc les différentes développantes obliques passant par un même point ont en ce point des centres de courbure situés sur la normale au point correspondant de la ligne des pôles.

Rayon de courbure de la développée de la développante oblique. — L'équation différentielle en r peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{R} = \mathrm{R}\cos a - \mathrm{R}'\sin a.$$

Donc la perpendiculaire (*fig.* 17) au rayon de courbure d'une courbe, menée par le centre de courbure, rencontre la

Fig. 17.

normale à la développée de la développante oblique de cette courbe, au centre de courbure de cette développée. De plus ce centre de courbure est situé sur la ligne symétrique du rayon tangentiel par rapport au rayon de courbure de la développante oblique.

Rectification de la développante. — La deuxième des équations (1) du n° 62 s'intègre immédiatement, et l'on obtient la relation

$$(5) \qquad r - r_0 + (\sigma - \sigma_0) = \cos a(s - s_0).$$

Soit (*fig.* 18) B_0B l'arc $(\sigma - \sigma_0)$, C_0C l'arc $s - s_0$, B_0C_0 égal

Fig. 18.

à r_0, BC égal à r. Si nous développons l'arc C_0C sur la tangente

au point C_0, de sorte que C_0C_1 égale cet arc, et qu'on achève le parallélogramme $AC_0C_1A_1$ et le rectangle A_1DEC_1 par la condition que A_1C_1 soit égal à r, on a

$$AC_0 - B_0C_0 = r - r_0 = AB_0;$$

par la nature de la figure, on a

$$AC_0 = DE, \quad \text{donc} \quad AD = C_0E;$$

conséquemment

$$AB_0 + B_0D = (s - s_0)\cos a,$$

donc

$$B_0D + (r - r_0) = (s - s_0)\cos a;$$

donc

$$B_0D = (\sigma - \sigma_0).$$

De là on déduit la construction suivante :

Construction. — *Développez l'arc* $(\sigma - \sigma_0)$ *sur la tangente à l'origine; à la suite de cet arc développé portez une longueur égale à* r; *à l'extrémité de cette longueur élevez une perpendiculaire, et de l'extrémité de* r_0 *menez une oblique sous l'angle* a: *la perpendiculaire déterminera sur cette oblique une longueur égale à* $s - s_0$, *arc de la développante oblique.*

L'arc s s'exprime analytiquement en fonction de ε. En effet, si les origines des arcs s et σ correspondent à la valeur nulle de ε, on aura

$$(6)\quad s\cos a = -r_0 + \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon + E^{\varepsilon\cot a}\left(r_0 - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,E^{-\varepsilon\cot a}\,d\varepsilon\right).$$

Il suffit donc que la courbe σ soit rectifiable pour que sa développante oblique le soit.

71. Application. — *Développantes obliques du cercle sous l'angle a.* — Soit m le rayon du cercle, son équation élémentaire sera

$$(1)\qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = m.$$

La seconde des équations (2) du numéro précédent devient

$$(2) \qquad \frac{dr}{d\varepsilon} - r\cot a + m = 0,$$

dont l'intégrale, en représentant par $\varepsilon_0 \cot a$ la constante introduite par l'intégration, prend la forme

$$(3) \qquad r\cot a = m + \mathrm{E}^{(\varepsilon-\varepsilon_0)\cot a};$$

on a donc, par suite de la première des équations (2) du numéro précédent, la relation

$$(4) \qquad \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{r}{\sin a} = \frac{m}{\cos a} + \frac{\mathrm{E}^{(\varepsilon-\varepsilon_0)\cot a}}{\cos a},$$

qui est l'équation élémentaire de la développante oblique du cercle.

De là résulte que, si l'on intègre l'équation (1) et qu'on représente par σ_0 la constante introduite par l'intégration, l'équation

$$(5) \qquad \sigma - \sigma_0 = m\varepsilon$$

et l'équation (3) donneront les deux coordonnées tangentielles de la développante oblique du cercle.

On obtient la rectification de cette développante en intégrant l'équation (4); or, si l'on représente par s_0 la constante introduite par l'intégration, on trouve l'équation

$$(6) \qquad (s - s_0)\cos a = m\varepsilon + \operatorname{tang} a\, \mathrm{E}^{(\varepsilon-\varepsilon_0)\cot a}.$$

Coordonnées cartésiennes de la développante oblique. — Pour abréger, écrivons l'équation (4) sous la forme suivante :

$$(4') \qquad \frac{ds}{d\varepsilon} = n + p\mathrm{E}^{k\varepsilon},$$

Si l'on remarque que l'on a les relations

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varepsilon, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varepsilon,$$

et qu'on ait égard à la valeur de ds donnée par l'équation (4), on obtiendra deux équations différentielles qui donneront dx et dy en fonction de ε. Si l'on intègre ces deux équations et qu'on représente par x_0, y_0 les constantes introduites par l'intégration, on trouve les deux relations

$$(7)\quad \begin{cases} x - x_0 - \dfrac{y - y_0}{k} = n \sin\varepsilon + \left(\dfrac{p}{k} E^{k\varepsilon} + \dfrac{n}{k}\right)\cos\varepsilon, \\ y - y_0 + \dfrac{x - x_0}{k} = -n\cos\varepsilon + \left(\dfrac{p}{k} E^{k\varepsilon} + \dfrac{n}{k}\right)\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Il résulte de là que, si l'on représente par ρ la distance d'un point de la courbe à un point dont les coordonnées sont x_0, y_0, et par θ l'angle que ρ fait avec l'axe fixe que l'on obtient en égalant à zéro le premier membre de la seconde des équations (7), on a les deux équations suivantes :

$$(7')\quad \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)\rho^2 = \left(\dfrac{p}{k} E^{k\varepsilon} + \dfrac{n}{k}\right)^2 + n^2, \\ \operatorname{tang}\theta = \dfrac{(pE^{k\varepsilon} + n)\cos\varepsilon + nk\sin\varepsilon}{(pE^{k\varepsilon} + n)\sin\varepsilon - nk\cos\varepsilon}, \end{cases}$$

lesquelles font connaître les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe en fonction de la variable ε.

On aurait l'équation de la courbe dans ce système de coordonnées, en prenant la valeur de ε en fonction de ρ dans la première équation, ce qui est possible, et en la portant à la place de ε dans la seconde.

72. Problème VII. — *Trouver les développantes obliques successives d'une courbe* $\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$.

Si l'on prend la développante oblique de la développante oblique d'une courbe, on a *la développante oblique du second ordre* de cette courbe. Généralement, si l'on prend la développante oblique de la développante oblique de l'ordre $n - 1$ d'une courbe, on a *la développante oblique de l'ordre n* de cette courbe.

Nous convenons de représenter par $\mathcal{R}_\alpha$, r_α le rayon de courbure et le rayon de courbure oblique sous l'angle α de la développante oblique σ_α d'une courbe σ, dont le rayon de courbure est $\mathcal{R}$; par $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$ le rayon de courbure et le rayon de courbure oblique de la développante oblique $\sigma_{\alpha\beta}$, sous l'angle β, de la courbe σ_α, et ainsi de suite.

Développantes obliques du second ordre. — On a les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} r_\alpha &= \mathcal{R}_\alpha \sin\alpha, & \frac{dr_\alpha}{d\varepsilon} - r_\alpha \cot\alpha + \mathcal{R} &= 0;\\ r_{\alpha\beta} &= \mathcal{R}_{\alpha\beta}\sin\beta, & \frac{dr_{\alpha\beta}}{d\varepsilon} - r_{\alpha\beta}\cot\beta + \frac{r_\alpha}{\sin\alpha} &= 0.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on ajoute les deux équations différentielles, après avoir multiplié la première par l'indéterminée λ, on aura l'équation

$$(2)\quad \frac{d(\lambda r_\alpha + r_{\alpha\beta})}{d\varepsilon} - \left(\lambda\cot\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\right) r_\alpha - \cot\beta\, r_{\alpha\beta} + \lambda\mathcal{R} = 0.$$

Cette équation rentrera dans la première si l'on pose la condition suivante

$$(3)\quad \lambda\cot\alpha - \frac{1}{\sin\alpha} = \lambda\cot\beta \quad \text{ou bien} \quad \lambda = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

et l'équation (2) devient

$$(2')\quad \frac{d(\lambda r_\alpha + r_{\alpha\beta})}{d\varepsilon} - \cot\beta(\lambda r_\alpha + r_{\alpha\beta}) + \lambda\mathcal{R} = 0.$$

Il suffit de poser

$$\lambda r_\alpha + r_{\alpha\beta} = \lambda r_\beta$$

pour transformer l'équation précédente en la suivante :

$$(4)\quad \frac{dr_\beta}{d\varepsilon} - \cot\beta\, r_\beta + \mathcal{R} = 0,$$

qui est l'équation différentielle d'une développante oblique du premier ordre sous l'angle β de la courbe $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$.

Si l'on remplace λ par sa valeur dans la relation précédente, on a la relation

$$(5) \qquad \frac{r_{\alpha\beta}}{\sin\beta} = \frac{r_\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{r_\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta}.$$

De cette expression nous tirons les propositions suivantes :

Le rayon tangentiel de la développante seconde oblique de la courbe σ sous l'angle α et sous l'angle β, compté sur la tangente à la courbe σ_α, est une fonction linéaire des rayons tangentiels des développantes obliques du premier ordre de la courbe σ, la première étant prise sous l'angle α, et la seconde sous l'angle β, ces deux rayons étant comptés sur la tangente à la courbe σ.

Si l'on prenait la développante oblique sous l'angle α de la développante oblique sous l'angle β de la courbe $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$, on trouverait

$$(6) \qquad \frac{r_{\beta\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{r_\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{r_\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \mathfrak{R}_{\beta\alpha}.$$

On en tire les conséquences suivantes :

1° Le rayon de courbure $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ étant une fonction symétrique par rapport à α et β, cette fonction ne change pas quand on change α en β, et réciproquement; donc on a la relation

$$(7) \qquad \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \mathfrak{R}_{\beta\alpha}.$$

Donc *si l'on prend deux développantes obliques d'une courbe, la première sous l'angle α et la seconde sous l'angle β, le lieu des intersections des tangentes en des points correspondants de ces deux développantes sera la développante oblique sous l'angle β de la première, et la développante oblique sous l'angle α de la seconde.*

2° Les relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme

$$(6')\qquad \frac{r_{\alpha\beta}}{\sin\beta} = \frac{r_{\beta\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{r_\beta - r_\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Donc *la différence des rayons tangentiels r_β et r_α de deux développantes obliques du premier ordre sous l'angle α et β, et les deux rayons tangentiels du second ordre correspondants, $r_{\alpha\beta}$, $r_{\beta\alpha}$, forment un triangle, les angles opposés à ces côtés étant $\alpha - \beta$, β et α, ou des suppléments de ces angles.*

3° Ce triangle étant déterminé quand on connaît trois de ses éléments parmi lesquels un côté, on déduit cette proposition :

Une développante oblique du second ordre relative à deux angles se trouve déterminée quand on connaît deux développantes obliques du premier ordre relatives chacune à chacun de ces angles; et réciproquement.

Cette détermination, au point de vue géométrique, donne la construction facile d'un point de la courbe, de sa tangente, de son rayon de courbure; et, au point de vue analytique, elle donne les formules les plus simples et les plus symétriques, représentant les intégrales des équations différentielles simultanées, qui se rapportent à la question des développantes obliques du second ordre. En effet ces intégrales sont, d'après le n° 70, E étant la base des logarithmes népériens

$$(6'')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{r_{\alpha\beta}}{\sin\beta} = \frac{r_{\beta\alpha}}{\sin\alpha} = {} & \frac{E^{\varepsilon\cot\alpha}}{\sin(\alpha-\beta)}\left((r_\alpha) - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R} E^{-\varepsilon\cot\alpha}\,d\varepsilon\right) \\ & + \frac{E^{\varepsilon\cot\beta}}{\sin(\beta-\alpha)}\left((r_\beta) - \int_0^\varepsilon \mathfrak{R} E^{-\varepsilon\cot\beta}\,d\varepsilon\right). \end{aligned}\right.$$

Coordonnées tangentielles. — Si aux dernières formules on joint les valeurs de $\sigma_\alpha \cos\alpha$, $\sigma_\beta \cos\beta$ obtenues par la dernière formule du n° 70, au moyen du changement de s en σ_α ou σ_β, et de a en α ou β, on aura les coordonnées tangentielles de la développante oblique seconde rapportée soit à la développante oblique première sous l'angle α, soit à la développante

oblique première sous l'angle β. La valeur de $r_{\alpha\beta}$ fait connaître le rayon de courbure de cette développante oblique seconde.

Rectification de la développante oblique seconde. — On obtiendra comme au n° 54 les équations

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma - (\sigma) = r_\alpha - (r_\alpha) + [\sigma_\alpha - (\sigma_\alpha)] \cos\alpha, \\ \sigma_\alpha - (\sigma_\alpha) = r_{\alpha\beta} - (r_{\alpha\beta}) + [\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta})] \cos\beta, \\ \sigma - (\sigma) = [\mathcal{R}_{\alpha\beta} - (\mathcal{R}_{\alpha\beta})] \sin(\alpha + \beta) \\ \qquad - [\mathcal{R}'_{\alpha\beta} - (\mathcal{R}'_{\alpha\beta})] \sin\alpha \sin\beta + [\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta})] \cos\beta \cos\alpha, \end{cases}$$

desquelles on déduit la construction suivante :

Développez l'arc $\sigma - (\sigma)$ sur la tangente à l'origine de l'arc, et portez à la suite le rayon r_α; à l'extrémité de (r_α) menez une oblique formant avec cette ligne un angle α, et à l'extrémité de r_α une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de l'oblique; à la suite de la longueur interceptée, portez un rayon égal à $r_{\alpha\beta}$; à l'extrémité de $(r_{\alpha\beta})$, menez une oblique sous l'angle β, et à l'extrémité de $r_{\alpha\beta}$, élevez une perpendiculaire, elle intercepte sur cette oblique la longueur $\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta})$.

Dans cette construction, la longueur $\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta})$ est indépendante de l'ordre dans lequel on fait intervenir les angles α, β, pourvu que les rayons obliques des développantes obliques qui servent à cette construction satisfassent à la relation que nous avons précédemment établie

$$\frac{r_{\beta\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{r_\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} + \frac{r_\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

L'arc $\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta})$ s'exprimerait analytiquement au moyen de la formule

$$(9)\qquad \sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\beta}) = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \mathcal{R}_{\alpha\beta}\, d\varepsilon = \frac{1}{\sin\alpha} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} r_{\alpha\beta}\, d\varepsilon,$$

dans laquelle on remplacerait $r_{\alpha\beta}$ par sa valeur donnée par l'équation (6″) en fonction de ε.

Généralement la formule (5) qui donne la valeur de R_1 dans le n° 54 devient, par l'introduction de la notation nou-

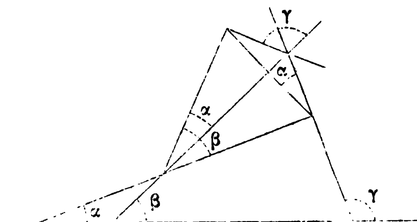
velle,

$$(10)\quad \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \sin\alpha\sin\beta\mathfrak{R}'' + \sin(\alpha+\beta)\mathfrak{R}' + \cos\alpha\cos\beta\mathfrak{R}.$$

Donc, *si deux développantes obliques secondes, l'une sous les angles α, β, l'autre sous les angles β et α, ont un point commun, et en ce point une tangente commune, elles coïncideront dans toute leur étendue.*

73. *Développantes obliques du troisième ordre et des ordres supérieurs.* — On déduit facilement de ce qui précède les théorèmes suivants (*fig.* 19) :

Fig. 19.



1° *Si l'on prend trois développantes obliques d'une courbe déterminée, sous les angles α, β, γ, les lieux des intersections des tangentes prises deux à deux en des points correspondants seront trois développantes obliques secondes $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\alpha}$; les tangentes en des points correspondants à ces trois développantes concourront en un même point, et le lieu de leurs intersections sera une développante troisième de la courbe proposée sous les angles α, β, γ.*

Ce théorème résulte de ce que la développante troisième est unique pour une seule et même détermination des trois constantes de l'intégrale de l'équation différentielle du troisième ordre de cette courbe. On peut aussi le démontrer géométriquement; en effet, dans la *fig.* 19, la ligne horizontale est la tangente à la courbe σ, coupée sous les angles α, β, γ par les tangentes aux points correspondants des trois développantes obliques σ_α, σ_β, σ_γ; la droite qui forme avec les deux premières,

en leur point d'intersection, des angles égaux à β et à α est la tangente à la développante oblique seconde $\sigma_{\alpha\beta}$; on trouve de la même manière les tangentes aux développantes obliques secondes $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\alpha}$; or, en remarquant que les intersections des tangentes aux points correspondants des développantes du second ordre doivent se trouver à la fois sur deux tangentes et sur le cercle passant par les trois points correspondants des trois développantes du second ordre, comme cela résulte de l'évaluation des angles, il faut que ces trois intersections se confondent en une seule.

2° *Généralement, si l'on prend n développantes obliques du premier ordre sous des angles différents, on aura* $\frac{n(n-1)}{2}$ *développantes obliques du second ordre,* $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ *développantes obliques du troisième, et ainsi de suite; enfin une développante oblique de l'ordre n. Donc les tangentes, en des points correspondants, aux n développantes obliques de l'ordre* $n-1$ *concourront en un même point, et le lieu de ces intersections sera la développante de l'ordre n.*

3° L'expression analytique des trois rayons tangentiels de la développante oblique du troisième ordre sera donnée par les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{r_{\alpha\beta\gamma}}{\sin\gamma} = \frac{r_{\beta\gamma}-r_{\beta\alpha}}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{r_{\beta\gamma\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{r_{\gamma\alpha}-r_{\gamma\beta}}{\sin(\alpha-\beta)} \\ &= \frac{r_{\gamma\alpha\beta}}{\sin\beta} = \frac{r_{\alpha\beta}-r_{\alpha\gamma}}{\sin(\beta-\gamma)}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma} &= r_\alpha \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)} + r_\beta \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)} \\ &\quad + r_\gamma \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera, de même, pour la développante oblique du quatrième ordre sous les angles α, β, γ, δ

$$(4)\qquad \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{r_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sin\delta} = \frac{r_{\beta\gamma\delta\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{r_{\gamma\delta\alpha\beta}}{\sin\beta} = \frac{r_{\delta\alpha\beta\gamma}}{\sin\gamma},$$

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \frac{r_\alpha \sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)} \\
& + \frac{r_\beta \sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)} \\
& + \frac{r_\gamma \sin^2\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma-\delta)} \\
& + \frac{r_\delta \sin^2\delta}{\sin(\delta-\alpha)\sin(\delta-\beta)\sin(\delta-\gamma)};
\end{aligned}
\right.
$$

en général, pour une développante de l'ordre n,

$$
(6)\quad \mathfrak{R}_{(\alpha\beta\ldots k)} = \sum \frac{r_\alpha \sin^{n-2}\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-k)},
$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les angles α, $\beta, \ldots, k$.

4° La construction pour obtenir l'arc de développante oblique du deuxième ordre s'applique à la rectification de l'arc de la développante oblique de l'ordre n : il suffit d'opérer sur les rayons tangentiels $r_{\alpha\beta\gamma}$ et les suivants, comme on a opéré sur r_α et $r_{\alpha\beta}$; le segment intercepté sur la dernière oblique par la dernière perpendiculaire exprime l'arc développé en ligne droite de la développante oblique de l'ordre n.

Cette construction est indépendante de l'ordre dans lequel on fait intervenir les angles et les rayons tangentiels correspondants, pourvu que ces rayons tangentiels satisfassent aux relations qui les lient entre eux dans chaque combinaison particulière.

5° Analytiquement, un arc de développante oblique de l'ordre n se déduit du rayon de courbure de cette développante dont nous avons donné l'expression générale.

6° Si deux développantes obliques de l'ordre n ont été obtenues de différentes manières, et qu'en un point d'intersection elles ont un contact de l'ordre $n-1$, elles seront identiques et se confondront en une seule et même courbe.

Coordonnées rectangles. — Concevons la ligne polygonale formée par la suite des rayons tangentiels depuis le rayon de la première développante r_1 jusqu'à r_n de la développante de

l'ordre n, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant les angles relatifs à ces développantes, et projetons cette ligne polygonale sur deux axes qui coïncideraient avec la tangente et la normale à l'origine de la courbe donnée, x, y étant les coordonnées du point pris sur la courbe, et x_n, y_n les coordonnées correspondant à l'extrémité du rayon r_n; on aura les deux équations

$$(7) \quad \begin{cases} x_n - x = r_1 \cos\varepsilon + r_2 \cos\varepsilon_1 + \ldots + r_n \cos\varepsilon_{n-1}, \\ y_n - y = r_1 \sin\varepsilon + r_2 \sin\varepsilon_1 + \ldots + r_n \sin\varepsilon_{n-1}; \end{cases}$$

ou bien, d'une manière symbolique,

$$x_n - x = \sum_1^n r_k \cos\varepsilon_{k-1}, \quad y_n - y = \sum_1^n r_k \sin\varepsilon_{k-1},$$

avec les relations

$$\varepsilon_k = \varepsilon + \sum_0^{n-1} \alpha_k.$$

Or, dans ces formules, x, y sont connues en fonction de ε, n° 77. Les coordonnées x_n, y_n seront donc exprimées en fonction d'une seule variable.

§ V. — Des lignes dont la courbure jouit d'une propriété connue.

74. Problème VIII. — *Étant données l'équation naturelle $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$ de la courbe des pôles, et l'équation naturelle $\frac{ds}{de} = \mathrm{R}$ de la courbe, trouver l'équation de celle-ci entre les deux variables r et ε.*

Remarquons que l'on a, en conservant les notations du n° 61, les relations

$$(1) \quad \begin{cases} e = a + \varepsilon, \\ \cos e = \cos a \cos\varepsilon - \sin a \sin\varepsilon, \\ \sin e = \sin a \cos\varepsilon + \cos a \sin\varepsilon. \end{cases}$$

Si l'on élimine $\cos a$ et $\sin a$ de ces équations au moyen des relations (1) du n° 61, on aura les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} ds\cos e - d\sigma\cos\varepsilon = d(r\cos\varepsilon), \\ ds\sin e - d\sigma\sin\varepsilon = d(r\sin\varepsilon), \end{cases}$$

et conséquemment

$$(3)\qquad \begin{cases} r\cos\varepsilon = \int \mathrm{R}\cos e\,de - \int \mathfrak{R}\cos\varepsilon\,d\varepsilon, \\ r\sin\varepsilon = \int \mathrm{R}\sin e\,de - \int \mathfrak{R}\sin\varepsilon\,d\varepsilon, \end{cases}$$

lesquelles ne dépendent que des quadratures. On en déduit les nouvelles formules

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\varepsilon = \dfrac{\int \mathrm{R}\sin e\,de - \int \mathfrak{R}\sin\varepsilon\,d\varepsilon}{\int \mathrm{R}\cos e\,de - \int \mathfrak{R}\cos\varepsilon\,d\varepsilon}, \\ r^2 = \left(\int \mathrm{R}\sin e\,de - \int \mathfrak{R}\sin\varepsilon\,d\varepsilon\right)^2 \\ \qquad + \left(\int \mathrm{R}\cos e\,de - \int \mathfrak{R}\cos\varepsilon\,d\varepsilon\right)^2. \end{cases}$$

Distance des centres de courbure. — Soient A le point où le rayon tangentiel touche la courbe σ, B le point où il coupe la courbe s, I et J les centres de courbure correspondants, on a, suivant que l'on projette le périmètre du quadrilatère AIJB sur AI ou sur AB, les relations

$$\mathrm{IJ}\cos\mathrm{JIA} = \mathrm{R}\cos a - \mathfrak{R},$$
$$\mathrm{IJ}\sin\mathrm{JIA} = \mathrm{R}\sin a - r,$$

desquelles on déduit

$$\operatorname{tang}\mathrm{JIA} = \frac{\mathrm{R}\sin a - r}{\mathrm{R}\cos a - \mathfrak{R}},$$
$$\overline{\mathrm{IJ}}^2 = (\mathrm{R}\cos a - \mathfrak{R})^2 + (\mathrm{R}\sin a - r)^2.$$

Or on a, avec la première des équations (4), la relation

$$a = e - \varepsilon,$$

et par conséquent a est une fonction de ε; les deux seconds membres des deux équations précédentes sont donc deux fonctions de la variable ε, ce qui résout complétement la question.

Remarques. — 1° Si l'on voulait exprimer les mêmes inconnues du problème en fonction de a, il suffirait d'exprimer e et ε en fonction de a au moyen de la première des équations (4) et de la relation $e = a + \varepsilon$.

2° Il sera donc possible, lorsque les équations élémentaires de deux courbes σ et s seront connues, de rapporter la seconde à la première considérée comme lieu des pôles, et l'on aura les coordonnées tangentielles de cette courbe s dans le système employé dans le Chapitre actuel; et, réciproquement, de rapporter la courbe σ à la courbe s dans le système tangentiel du Chapitre précédent.

Ces formules font connaître e et r en fonction de ε, ce qui est la solution complète du problème.

Si les deux courbes sont deux cercles, l'un de rayon c et l'autre de rayon b, qu'on représente par m l'une des deux constantes d'intégration, et qu'on choisisse l'axe de manière que l'autre constante s'annule, la première équation (4) devient

$$(5) \qquad \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = -\frac{b\cos e - c\cos\varepsilon}{b\sin e - c\sin\varepsilon + m},$$

de laquelle on déduit

$$\varepsilon - e = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{c - m\sin\varepsilon}{b}\right);$$

on obtient donc l'expression suivante du rayon vecteur

$$(6) \qquad r^2 = (b\sin e - c\sin\varepsilon + m)^2 + (c\cos\varepsilon - b\sin e)^2.$$

La question peut être traitée géométriquement.

Les deux courbes (*fig.* 20) sont deux cercles de rayons $\mathfrak{R}$ et R, la ligne O_1X_1 étant la tangente au cercle $\mathfrak{R}$ parallèle à la ligne des centres (II'); soit δ la distance des centres; on a, en conservant les notations précédentes, les équations

$$\begin{aligned} X - x &= r\cos\varepsilon = R\sin e - \mathfrak{R}\sin\varepsilon + \delta, \\ Y - y &= r\sin\varepsilon = -R\cos e + \mathfrak{R}\cos\varepsilon. \end{aligned}$$

On déduit de ces deux formules les deux suivantes :

$$\mathfrak{R} = R\cos a + \delta \sin \varepsilon,$$
$$r = R\sin a + \delta \cos \varepsilon.$$

La première donne a en fonction de ε, et conséquemment la seconde devient

$$r = \delta \cos\varepsilon + \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{R} - \delta \sin\varepsilon}{R}\right)^2}.$$

Fig. 20.

75. Problème IX. — *Étant donnée l'équation de la courbe des pôles* $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R}$, *ainsi que l'équation différentielle d'une courbe entre les variables s et e de la forme*

$$(1) \qquad m_{-1}s + m_1 s' + m_2 s'' + \ldots + m_n s^{(n)} = F(e),$$

dans laquelle $m_{-1}, m_1, m_2, \ldots, m_n$ *sont des constantes, déterminer cette seconde courbe, sous forme finie, en la rapportant aux coordonnées r et* ε.

Lorsque l'équation différentielle (1) aura été intégrée, la question sera ramenée au problème précédent ; mais le calcul peut être conduit de la manière suivante, qui dispense de plusieurs intégrations.

Si, dans la formule (3) du numéro précédent, on pose, pour

abréger,

(2) $x = r\cos\varepsilon + \int \mathfrak{R}\cos\varepsilon\, d\varepsilon, \quad y = r\sin\varepsilon + \int \mathfrak{R}\sin\varepsilon\, d\varepsilon,$

on obtiendra, par une suite d'intégrations par parties, les deux catégories de formules

$$(3)\quad \begin{cases} x = \int \frac{ds}{de}\cos e\, de, \\ x = s\cos e + \int s\sin e\, de, \\ x = \frac{ds}{de}\sin e - \int \frac{d^2s}{de^2}\sin e\, de, \\ x = \frac{ds}{de}\sin e + \frac{d^2s}{de^2}\cos e - \int \frac{d^3s}{de^3}\cos e\, de, \\ x = \frac{ds}{de}\sin e + \frac{d^2s}{de^2}\cos e - \frac{d^3s}{de^3}\sin e + \int \frac{d^4s}{de^4}\sin e\, de, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x = \left(\frac{ds}{de} - \frac{d^3s}{de^3} + \cdots\right)\sin e + \left(\frac{d^2s}{de^2} - \frac{d^4s}{de^4} + \cdots\right)\cos e \\ \qquad + \int \frac{d^ns}{de^n}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + e\right) de; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} y = \int \frac{ds}{de}\sin e\, de, \\ y = s\sin e - \int s\cos e\, de, \\ y = -\frac{ds}{de}\cos e + \int \frac{d^2s}{de^2}\cos e\, de, \\ y = -\frac{ds}{de}\cos e + \frac{d^2s}{de^2}\sin e - \int \frac{d^3s}{de^3}\sin e\, de, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y = -\left(\frac{ds}{de} - \frac{d^3s}{de^3} + \cdots\right)\cos e + \left(\frac{d^2s}{de^2} - \frac{d^4s}{de^4} + \cdots\right)\sin e \\ \qquad - \int \frac{d^ns}{de^n}\cos\left(\frac{n\pi}{2} + e\right) de. \end{cases}$$

Cela posé, si à partir de la seconde formule de chacune de ces deux catégories on considère successivement les équa-

tions qui contiennent $\cos e$ sous le signe intégral, qu'on les multiplie respectivement par

$$-m_{-1},\ +m_1,\ +m_2,\ -m_3,\ -m_4,\ \ldots$$

et qu'on ajoute, on aura une relation qui, par suite de l'équation différentielle proposée, ne contiendra que l'intégrale $\int F(e)\cos e\,de$, et en opérant d'une manière analogue par rapport aux équations qui contiennent $\sin e$ sous le signe intégral, on aura une seconde relation qui ne dépendra que de l'intégrale $\int F(e)\sin e\,de$, de sorte que, si l'on représente par M et N deux constantes et par X, Y deux fonctions linéaires de s et de ses dérivées, dont la composition est évidente, on aura les deux relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} Mx + Ny &= X\cos e + Y\sin e + \int F(e)\cos e\,de,\\ My - Nx &= X\sin e - Y\cos e + \int F(e)\sin e\,de;\end{aligned}\right.$$

or, puisque l'intégrale de l'équation (1) qui est linéaire est connue, X et Y sont fonctions de e; donc, si l'on pose

$$\frac{N}{M} = \operatorname{tang}\varepsilon_0,\quad \frac{Y}{X} = \operatorname{tang}\lambda,$$

et qu'on remplace x et y par leurs valeurs, on aura les deux nouvelles relations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{M^2+N^2}\left[r\cos(\varepsilon-\varepsilon_0) + \int \mathfrak{R}\cos(\varepsilon-\varepsilon_0)\,d\varepsilon\right]\\ &\qquad = \left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)\cos(e-\lambda) + \int F(e)\cos e\,de,\\ &\sqrt{M^2+N^2}\left[r\sin(\varepsilon-\varepsilon_0) + \int \mathfrak{R}\sin(\varepsilon-\varepsilon_0)\,d\varepsilon\right]\\ &\qquad = \left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)\sin(e-\lambda) + \int F(e)\sin e\,de,\end{aligned}\right.$$

lesquelles font connaître ε et r en fonction de e, ce qui est la solution du problème.

Remarque I. — Si la courbe des pôles se réduit à un point,

$\mathfrak{R}$ devient nul, et l'on obtient les deux équations suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} r^2(M^2+N^2)=X^2+Y^2 \\ \qquad +2\sqrt{X^2+Y^2}\left[\cos(e-\lambda)\int F(e)\cos e\,de \right.\\ \qquad\qquad \left. +\sin(e-\lambda)\int F(e)\sin e\,de\right] \\ \qquad +\left[\int F(e)\cos e\,de\right]^2+\left[\int F(e)\sin e\,de\right]^2; \\ \cot(\varepsilon-\varepsilon_0)=\dfrac{(\sqrt{X^2+Y^2})\cos(e-\lambda)+\int F(e)\cos e\,de}{(\sqrt{X^2+Y^2})\sin(e-\lambda)+\int F(e)\sin e\,de}. \end{cases}$$

Remarque II. — Si le second membre de l'équation différentielle proposée est nul, ces deux dernières relations se simplifient et deviennent les deux suivantes :

$$(M^2+N^2)r^2=X^2+Y^2,\quad \text{tang}(\varepsilon-\varepsilon_0)=\text{tang}(e-\lambda);$$

cette dernière donne

$$\varepsilon=\varepsilon_0+e-\text{arc tang}=\frac{Y}{X}.$$

Les applications de ce problème sont très-nombreuses.

76. Problème X. — *Étant donnée la courbe des pôles, trouver la polaire telle que le rayon tangentiel soit la projection de l'ordre m de son rayon de courbure.*

Les données de la question sont

$$(1)\qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\mathfrak{R},\quad r=R\sin^m a\quad \text{ou bien}\quad N=R\sin^{m-1}a.$$

L'équation $r\,d\varepsilon=\sin a\,ds$ donne

$$(2)\qquad d\varepsilon=\frac{de}{\sin^{m-1}a},$$

et, par suite, l'équation $de=da+d\varepsilon$ donne les relations sui-

vantes :

$$(3)\qquad d\varepsilon = \frac{da}{\sin^{m-1}a - 1}, \quad de = \frac{\sin^{m-1}a\,da}{\sin^{m-1}a - 1},$$

$$(4)\qquad \varepsilon = \int_{a_0}^{a} \frac{da}{\sin^{m-1}a - 1},$$

a_0 étant la valeur de a correspondante de la valeur nulle de ε.

La deuxième équation (1) du n° 62 peut s'écrire sous la forme

$$(5)\qquad \frac{dr}{d\varepsilon} - r\cot a + \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0,$$

σ et a étant des fonctions connues de ε. On a, par l'intégration de cette équation différentielle linéaire du premier ordre, l'expression suivante de r

$$(6)\qquad r = \mathrm{E}^{\int_0^\varepsilon \cot a\,d\varepsilon}\left(r_0 - \int_0^\varepsilon \mathrm{E}^{-\int_0^\varepsilon \cot a\,d\varepsilon}\,\mathfrak{R}\,d\varepsilon\right).$$

Si l'on joint à cette équation l'équation suivante, résultant de l'intégration de la première des équations (1), on obtient σ en fonction de ε

$$(7)\qquad \sigma = \int_0^\varepsilon \mathfrak{R}\,d\varepsilon;$$

on aura donc les coordonnées tangentielles (système inverse) de la courbe cherchée.

Le rayon de courbure est donné par la seconde des deux équations (1) proposées, de laquelle on déduit soit la construction géométrique, soit l'expression analytique de ce rayon. On déduit de l'expression de ce rayon de courbure la rectification de l'arc de la courbe cherchée, ainsi que la quadrature de cette courbe.

Les hypothèses $m = 0$, $m = 1$ donnent les développantes et les développantes obliques de la courbe des pôles.

Considérons le cas particulier où $m = 3$.

On a les deux équations

$$r = \mathrm{R}\sin^3 a, \quad d\varepsilon = -\frac{da}{\cos^2 a};$$

or, si l'on opère comme au n° 54, on trouvera

$$\varepsilon_0 - \varepsilon = \operatorname{tang} a;$$

ε_0 étant la constante arbitraire, la valeur de r sera

$$r = \cot a(r_0 - \int \operatorname{tang} a d\sigma);$$

on aura donc, en posant $\mathfrak{R} = \psi'(\varepsilon)$, le rayon r exprimé, soit en fonction de a, soit en fonction de ε, par l'une des deux équations

$$r = \cot a\left[r_0 + \int \psi'(\varepsilon_0 - \operatorname{tang} a)\frac{\operatorname{tang} a\, da}{\cos^2 a}\right],$$

$$r = \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon}[r_0 - \int \psi'(\varepsilon)(\varepsilon_0 - \varepsilon)d\varepsilon].$$

On a donc les deux coordonnées tangentielles (système inverse) de la courbe. Les valeurs de $\sin a$ et de $\cos a$ sont données par les équations

$$\sin a = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\sqrt{1 + (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2}}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_0)^2}}.$$

Or on a l'équation

$$ds = \frac{r d\varepsilon}{\sin a};$$

on aura donc l'arc ds exprimé soit en fonction de ε, soit en fonction de a, par l'une des deux équations suivantes :

$$ds = \frac{d\varepsilon\sqrt{1 + (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2}}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_0)^2}[r_0 - \int (\varepsilon_0 - \varepsilon)\mathfrak{R}\, d\varepsilon],$$

ou bien

$$ds = -\frac{da}{\sin^2 a \cos a}[r_0 + \int \operatorname{tang} a\, d\sigma]$$

$$= \left(-\frac{\cos a\, da}{\sin^2 a} - \frac{da}{\cos a}\right)[r_0 + \int \operatorname{tang} a d\sigma].$$

77. Problème XI. — *Trouver dans le système de coordonnées polaires la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à une puissance m de la normale.*

On a la relation, k étant une constante,

$$(1)\qquad R = \frac{N^m}{k} = \frac{r^m}{k\sin^m a};$$

l'équation (6^v) du n° 63, si l'on pose $\cot^2 a = z$, deviendra donc

$$(2)\qquad d\left(\frac{1+z}{r^2}\right) + \frac{2k\,dr}{r^{m+2}}\sin^{m-3} a = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$(2')\qquad \left(\frac{1+z}{r^2}\right)^{\frac{m-3}{2}} d\left(\frac{1+z}{r^2}\right) + \frac{2k\,dr}{r^{2m-1}} = 0.$$

Si l'on intègre et qu'on appelle c la constante de l'intégration, on obtient l'équation suivante :

$$(3)\qquad \frac{2}{m-1}\left(\frac{1+z}{r^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{2k}{2m-2}\,\frac{1}{r^{2m-2}} = c;$$

or, si dans cette équation on remplace z par sa valeur $\frac{dr^2}{r^2\,d\varepsilon^2}$, on obtient l'équation différentielle première de la courbe

$$(4)\qquad d\varepsilon = \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{2}{m-1}} r^2\left[c + \frac{k}{m-1}\,\frac{1}{r^{2(m-1)}}\right]^{\frac{2}{m-1}} - 1}}.$$

Dans cette équation, les variables sont séparées.

Application à quelques exemples. — 1° Soit $m = 3$, on a

$$d\varepsilon = \frac{dr}{\sqrt{cr^4 - r^2 + \frac{k}{2}}},$$

qui se ramène aux fonctions elliptiques.

2° Si $m = 2$, on a

$$d\varepsilon = \frac{2\,dr}{\sqrt{c^2 r^4 + (2ck - 4)r^2 + k^2}},$$

qui est de même forme que la précédente.

3° Si $m = 1$, la formule devient illusoire. Ce cas intéressant mérite d'être spécialement traité.

Opérons directement sur la formule (2'), nous obtenons l'équation

$$d\varepsilon = \frac{dr}{r\sqrt{c\,r^{2(1-k)} - 1}},$$

qui est une différentielle binôme satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Pour l'intégrer, il suffit de poser

$$c\,r^{2(1-k)} = u^2;$$

on obtient alors

$$(k-1)\,d\varepsilon = \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}},$$

dont l'intégrale, lorsqu'on y remplace u par sa valeur en fonction de r, et qu'on exprime par ε_0 la constante d'intégration, prend la forme

$$r^{k-1} = c^{\frac{1}{2}} \sin[(k-1)(\varepsilon - \varepsilon_0)].$$

Cette équation représente une famille de courbes remarquables; il nous suffit de signaler les suivantes :

Si $k = 2$, on trouve le cercle rapporté à un pôle situé sur sa circonférence; dans ce cas, on vérifie directement par la Géométrie que la normale est double du rayon de courbure.

Si $k = -1$, on trouve l'hyperbole équilatère rapportée à son centre, et l'on retrouve une propriété connue de son rayon de courbure.

Si $k = 1$, l'intégrale devient illusoire, mais l'équation différentielle conduit à l'équation de la spirale logarithmique.

78. **Problème XII.** — ***Trouver la courbe dans le système de coordonnées polaires telle que le rayon de courbure satisfasse à la relation***

$$\text{(1)}\qquad R\sin^3 a = \mathfrak{C},$$

$\mathfrak{C}$ étant une fonction de r.

Si l'on opère comme dans le problème précédent, on trouve l'équation

$$\text{(2)}\qquad d\left(\frac{1+z}{r^2}\right) = -\frac{2\,dr}{r^3\mathfrak{C}}.$$

Les deux membres étant des différentielles exactes, on obtient, en représentant par c^2 la constante arbitraire, l'équation suivante :

$$\text{(3)}\qquad \frac{1+z}{r^2} + 2\int\frac{dr}{r^3\mathfrak{C}} = c^2.$$

En y remplaçant z par sa valeur, cette équation devient

$$\text{(4)}\qquad d\theta = \frac{dr}{\sqrt{c^2r^4 - r^2 - 2r^4\displaystyle\int\frac{dr}{r^3\mathfrak{C}}}}.$$

Si $\mathfrak{C} = \dfrac{3r}{2m^2}$, cette dernière équation prend la forme suivante, déjà trouvée à la fin du numéro précédent :

$$\text{(5)}\qquad d\theta = \frac{dr}{\sqrt{c^2r^4 - r^2 + \frac{2}{3}m^2r^2}}.$$

Si l'on suppose m égal à l'unité, cette dernière équation devient

$$\text{(6)}\qquad \frac{c\,d\theta}{\sqrt{3}} = \frac{-d\left(\dfrac{1}{r\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{3c^2r^2}}}.$$

Si on l'intègre et qu'on représente par θ_0 la constante arbi-

traire, on obtient

$$\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{3}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{\sqrt{3}cr}\right),$$

laquelle, résolue par rapport à r, donne l'équation de la courbe

$$(7) \qquad \frac{1}{r} = c\sqrt{3}\sin\frac{(\theta_0 - \theta)}{\sqrt{3}}.$$

La question est donc complétement résolue.

§ VI. — Des courbes dérivant de la déformation d'une courbe donnée.

79. Problème XIII. — *On développe une courbe sur une droite et l'on suppose qu'après le développement les rayons de courbure sont restés perpendiculaires aux éléments correspondants de la courbe; quel est le lieu des centres de courbure après le développement?*

L'analyse dont nous avons fait usage se prête avec la plus grande facilité à la solution de cet ordre de questions.

Équations de la courbe en coordonnées rectilignes. — Soient x et y les coordonnées cartésiennes de la courbe, on a

$$(1) \qquad x = s, \quad y = \frac{ds}{de};$$

or s et $\frac{ds}{de}$ sont des fonctions de e (Chap. II); l'élimination de cette variable entre les deux relations précédentes conduit donc à l'équation de la courbe.

Tangente et différentielle de l'arc. — Soient λ l'angle de la tangente avec l'axe des x et $d\Sigma$ la différentielle de l'arc, on a

$$(2) \qquad \text{tang}\lambda = \frac{\left(\frac{d^2s}{de^2}\right)}{\left(\frac{ds}{de}\right)}, \quad \frac{d\Sigma^2}{de^2} = \frac{ds^2}{de^2} + \left(\frac{d^2s}{de^2}\right)^2.$$

Rayon de courbure. — Si l'on différentie la première des équations précédentes et qu'on ait égard à la seconde, on obtient l'équation

$$(3) \qquad \frac{d\lambda}{d\Sigma} = \frac{\frac{ds}{de}\frac{d^3 s}{de^3} - \left(\frac{d^2 s}{de^2}\right)^2}{\left[\frac{ds^2}{de^2} + \left(\frac{d^2 s}{de^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

qui donne l'expression de la courbure de la courbe cherchée.

Différentielle de l'aire. — Soit du cette différentielle, on a la relation

$$(4) \qquad du = \frac{ds^2}{de^2} de;$$

elle indique que la différentielle de cette aire est le double de la différentielle de l'aire de la courbe proposée, balayée par le rayon de courbure correspondant. Conséquemment, l'aire de la courbe proposée, limitée par deux rayons de courbure, est la moitié de l'aire de la courbe après son développement, cette aire étant limitée par deux ordonnées correspondant à ces rayons.

Applications. — 1° *Cycloïde.* L'équation de cette courbe, rapportée à son sommet et à la tangente en ce point, donne (n° 24)

$$s = 2a \sin e, \quad \frac{ds}{de} = 2a \cos e;$$

le lieu des centres de courbure après le développement de la courbe sur la tangente sera un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 4a^2.$$

2° *Spirale logarithmique.* Nous avons trouvé au n° 20

$$s = \frac{m}{la}(a^e - 1), \quad \frac{ds}{de} = ma^e;$$

l'équation du lieu des centres de courbure après le dévelop-

pement de la courbe sera donc l'équation de la droite

$$y = (la)x + m.$$

On trouverait de la même manière que les lieux des centres de courbure après développement des courbes sont : pour la chaînette, une parabole; et pour l'épicycloïde, une conique.

3° Trouver la courbe telle que, après son développement sur une droite, les extrémités des rayons de courbures soient situées sur la parabole du degré m

$$y = px^m.$$

Cette équation donne la suivante

$$\frac{ds}{de} = ps^m,$$

dont l'intégrale est

$$s^{1-m} = p(1-m)(e-e_0);$$

donc l'équation élémentaire de la courbe est

$$\frac{ds}{de} = p^{\frac{1}{1-m}}[(1-m)(e-e_0)]^{\frac{m}{1-m}}.$$

La famille des courbes renfermées dans cette équation contient les développantes d'un ordre quelconque du cercle.

S'il s'agit de la parabole du second degré $y = px^{\frac{1}{2}}$, le lieu des centres de courbure, après le développement sur une droite, a pour équation naturelle

$$\frac{ds}{de} = \frac{p^2}{2}(e-e_0);$$

c'est la développante première du cercle.

Si la courbe donnée est la parabole semicubique $y = px^{\frac{2}{3}}$, le lieu des centres de courbure après le développement sur

une droite a pour équation naturelle

$$\frac{ds}{de} = p(e - e_0)^2;$$

c'est la développante seconde du cercle.

Nous laissons au lecteur le soin de poursuivre ces applications.



LIVRE II.

DES COURBES RAPPORTÉES A DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES COMPLEXES.

CHAPITRE PREMIER.

DES COURBES CONJUGUÉES SUIVANT LEURS TANGENTES CONCOURANTES EN UN POINT D'UNE COURBE DIRECTRICE.

§ I. — FORMULES GÉNÉRALES.

80. *Définitions.* — Si d'un point quelconque d'une courbe directrice PQ on mène une tangente à chacune de deux courbes données MN, M_1N_1, ces deux tangentes ne seront pas arbitraires, elles seront liées par une certaine loi $F = 0$, qui dépendra de la nature des trois courbes et de leurs positions respectives. Nous dirons que ces deux tangentes sont *conjuguées* par rapport à un point de la directrice, d'après la loi F, et que les deux courbes MN, M_1N_1 sont *conjuguées* suivant deux tangentes concourantes en un point de la directrice. Pour chaque couple de tangentes, les points de contact seront dits *points conjugués*. Le point de concours des deux tangentes et chacun des points de contact seront nommés *points correspondants*.

Si les arcs de courbe tels que MN sont au nombre de n, on aura un faisceau de n tangentes conjuguées par rapport à un point de la directrice, d'après la loi F, et ces n arcs de courbe sont *conjugués* suivant n tangentes concourantes en un point de la directrice. Pour chaque faisceau les n points de contact sont *conjugués* entre eux. Le sommet du faisceau et

chacun des points de contact sont nommés *points correspondants*.

Certains arcs de courbe peuvent appartenir à une seule et même courbe, ou à des courbes différentes, suivant la nature de la question à résoudre.

Notations. — Nous conservons les notations exposées dans le n° 46; mais, pour distinguer les unes des autres les diverses courbes conjuguées entre elles, nous affecterons d'un indice marquant le rang de la courbe toutes les quantités géométriques relatives à cette courbe. Lorsque nous nous servirons du signe abréviatif Σ, nous n'affecterons d'aucun indice la lettre placée sous ce signe, et nous entendrons par là qu'elle se rapporte à un rang quelconque, de sorte que, dans la sommation, il faudra affecter cette lettre successivement de tous les indices, depuis 1 jusqu'à n.

Lorsqu'il existe n équations semblables à une équation dont le type est donné, nous écrivons cette équation une seule fois; nous n'affectons d'aucun accent les lettres relatives à cette équation, et nous écrivons à droite entre deux parenthèses la lettre n, (n), de sorte que toutes les équations du type s'obtiendront en écrivant n fois l'équation, en affectant les lettres successivement des accents 1, 2,... jusqu'à n.

81. Problème I. — *n courbes sont conjuguées suivant n tangentes concourantes en un point de la directrice; les angles que ces n tangentes font en leur point de concours avec la tangente à la directrice sont liés par la relation*

$$(1)\qquad F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = c;$$

c étant une constante, trouver les lois d'après lesquelles sont conjugués les points de contact, les rayons de courbure, les aires et les arcs de ces n courbes.

On a les équations suivantes se rapportant à une courbe quelconque :

$$(2)\quad \sin a = \frac{r\,d\varepsilon}{ds}, \quad \cos a = \frac{d\sigma - dr}{ds}, \quad \frac{\sin a}{r} - \frac{1}{R} = \frac{da}{ds}. \quad (n)$$

Points de contact. — Si l'on différentie l'équation (1) par rapport aux angles a et qu'on élimine les da au moyen des équations renfermées dans le troisième groupe précédent, on obtient les relations

$$(3) \qquad \sum \frac{dF}{da}\left(\frac{\sin a}{r} - \frac{1}{R}\right) = 0, \qquad (n)$$

$$(4) \qquad s = \int_{e_0}^{e} R\, de = \int_{a_0}^{a} D\, da. \qquad (n)$$

Si la courbe directrice et $(n-1)$ courbes sont connues, cette équation, jointe à l'équation (1), fait connaître a_n, e_n, r_n, c'est-à-dire les coordonnées tangentielles de la $n^{\text{ième}}$ courbe.

Rayons de courbure. — Si l'on différentie la troisième des équations (2), et que l'on pose pour abréger

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = r', \quad \frac{dR}{de} = R', \quad \frac{dD}{da} = D', \qquad (n)$$

on aura

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\cos a}{D} - \frac{r'}{N^2}\right) + \frac{R'}{R^3} + \frac{D'}{D^3} = 0; \qquad (n)$$

en multipliant les n équations contenues dans ce type, respectivement par les dérivées de F par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et en ajoutant, on trouve l'équation

$$\sum \frac{dF}{da}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\cos a}{D} - \frac{r'}{N^2}\right) + \frac{R'}{R^3} + \frac{D'}{D^3}\right] = 0;$$

or, si l'on différentie l'équation (3) ou son égale représentée par la relation

$$(3') \qquad \sum \frac{dF}{da}\frac{1}{D} = 0,$$

on obtient l'équation

$$\sum \frac{dF}{da}\frac{D'}{D^3} = \sum\left[\frac{1}{D}\frac{d}{da}\left(\sum \frac{dF}{da}\right)\right];$$

on peut écrire symboliquement le second membre sous la

forme $\left(\sum \frac{1}{D} \frac{d}{da}\right)^2 F$, pourvu que, lorsqu'on aura effectué les opérations, on regarde les exposants comme des indices de différentiation. D'après cela, l'élimination de $\sum \frac{dF}{da} \frac{D'}{D^3}$ entre les deux dernières équations donne l'équation

$$(5) \quad \sum \frac{dF}{r\,da}\left(\frac{r'}{N^2} - \frac{\cos a}{D}\right) = \frac{R'}{R^3} \sum \frac{dF}{da} + \left(\sum \frac{1}{D} \frac{d}{da}\right)^2 F.$$

Si la courbe directrice et $(n-1)$ courbes conjuguées sont connues, cette équation, jointe aux équations (1) et (2), fait connaître le rayon de courbure de la $n^{\text{ième}}$ courbe.

Aires. — Si l'on remarque que l'équation (3″) du n° 48 donne la relation suivante :

$$(6) \qquad \frac{\sin^2 a}{du} - \frac{1}{dv} = \frac{2\,da}{ds^2}, \qquad (n)$$

et qu'on multiplie les n équations contenues dans ce type, respectivement par les dérivés de F par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et qu'on ait égard à l'équation (3′), on obtiendra l'équation

$$(7) \qquad \sum \frac{\sin^2 a}{du} \frac{dF}{da} = \frac{1}{dv} \sum \frac{dF}{da},$$

qui exprime la loi d'après laquelle sont conjuguées les aires $du_1, du_2, \ldots, du_n$.

Arcs. — Si l'on écrit la deuxième des équations (2) sous la forme

$$\frac{d(\sigma - r)}{D \cos a} = da, \qquad (n)$$

et qu'on ajoute les n équations contenues dans ce type, après les avoir multipliées par les dérivées de F par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on aura la relation

$$(8) \qquad \sum \frac{dF}{da} \frac{d(\sigma - r)}{D \cos a} = 0,$$

qui exprime la loi d'après laquelle les arcs de n courbes sont conjugués.

Il nous faut maintenant montrer comment les équations précédentes font connaître toutes les particularités de la courbe cherchée.

Soient donc connues la directrice s et $(n-1)$ courbes conjuguées, la $n^{ième}$ sera aussi connue. En effet, s étant connue, les coordonnées d'un point de cette courbe sont des fonctions de la variable e qui fixe la position du point. Les équations contenues dans le type (4), jointes à l'équation (1), font connaître les angles tels que a en fonction de e; on connaît donc a_n en fonction de e. D'une autre part, le type contenu dans la troisième des équations (2) donne $(n-1)$ équations qui, jointes à l'équation (3), donnent les r en fonction de e; r_n est donc connue en fonction de cette variable. On a donc les coordonnées a_n et r_n de la $n^{ième}$ courbe σ_n en fonction du paramètre e qui fixe la position du point sur la directrice, ce qui est la solution de la question.

§ II. — Des courbes conjuguées d'après la loi $\Sigma A a =$ const.

82. Problème II. — *n courbes sont conjuguées suivant n tangentes concourantes en un point d'une courbe directrice, de telle sorte que les arcs de cercle décrits de ce point comme centre avec des rayons $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et compris entre chacune de ces tangentes et la tangente à la directrice, donnent une somme constante. Trouver les lois qui régissent ces courbes.*

Loi des tangentes. — La condition qui lie les arcs de cercle est

$$(1)\qquad \Sigma A a = \text{const.};$$

d'après cela, la loi des tangentes est donnée par l'une ou l'autre des équations

$$(2)\qquad \sum \frac{A}{D} = 0, \quad \sum A\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\Sigma A}{R}.$$

Loi des rayons de courbure. — On trouve sans difficulté la suivante :

$$(5) \quad \sum \frac{A}{\sin a N^3}\left[\mathfrak{R} - \left(N + \frac{N^2}{D}\right)\cos a - \frac{R'N^3}{R^3}\sin a\right] = 0;$$

or si l'on conçoit le quadrilatère relatif à une courbe σ, dont trois côtés sont parallèles à $\mathfrak{R}$, R, R′, et dont les longueurs sont représentées par $\mathfrak{R}$, et les coefficients de $\cos a$, $\sin a$, la partie entre accolades représentant la projection P du quatrième côté de ce quadrilatère sur $\mathfrak{R}$, l'équation précédente s'écrira sous la forme simple

$$(5') \quad \sum \frac{AP}{\sin a N^3} = 0,$$

de laquelle on déduit, par une construction géométrique, le $n^{ième}$ des rayons de courbure des n courbes conjuguées lorsque les autres sont connus.

Loi des aires. — Cette loi est donnée par la formule suivante :

$$(6) \quad \sum A\left(\frac{\sin^2 a}{du} - \frac{1}{dv}\right) = 0,$$

Loi des arcs. — Elle est exprimée par la relation suivante :

$$(8) \quad \sum \frac{d(\sigma - r)}{D\cos a} A = 0.$$

Les conséquences des formules précédentes sont très-nombreuses; mais comme elles ont déjà été développées dans notre livre *Sur l'analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, page 300, c'est à ce livre que nous renvoyons le lecteur.

83. *Discussion des formules précédentes.* — Contentons-nous de l'examen des cas suivants :

1° *Cas où la directrice est rectiligne.* — Lorsque la directrice est rectiligne, les formules précédentes se simplifient;

en effet, on a R infini et conséquemment $N = D$; d'après cela, on obtient les relations suivantes :

Loi des tangentes.

$$\sum \frac{A}{N} = 0. \tag{2}$$

Loi des rayons de courbure.

$$\sum \frac{\mathfrak{R}}{N^2 \sin a} = 2 \frac{\cot a}{N^2}. \tag{3}$$

2° *Cas où* $\Sigma A = 0$. — Dans le cas d'une directrice quelconque, si la somme des coefficients tels que A est nulle, on obtient les formules qui suivent :

Loi des tangentes. — Elle est aussi donnée par la formule (2) du présent numéro; en effet, cette équation est la conséquence de la condition

$$\sum A \frac{da}{ds} = \sum \frac{A}{D} = 0.$$

Loi des rayons de courbure.

$$\sum A \frac{\mathfrak{R}}{N^2 \sin a} = \sum A \left(1 + \frac{N}{D}\right) \frac{\cot a}{N^2}. \tag{5'}$$

Loi des aires.

$$\sum A \frac{\sin^2 a}{du} = 0. \tag{6}$$

§ III. — Des caustiques par réflexion.

84. Problème III. — *Un point lumineux se meut sur l'une des deux courbes conjuguées et projette sa lumière tangentiellement à cette courbe; la courbe enveloppe de ce rayon lumineux réfléchi par la courbe s sera appelée caustique par réflexion. Trouver les lois qui régissent ces caustiques.*

Les données de la question sont

$$(1) \qquad \frac{ds}{de} = R, \quad \frac{ds}{da_1} = D_1, \quad a_1 + a_2 = \pi.$$

Coordonnées tangentielles. — Elles sont pour la première courbe

$$(2) \qquad s = \int_0^{e_1} R\, de_1 = \int_0^{a_1} D_1\, da_1, \quad r_1 = \frac{RD_1}{R + D_1} \sin a_1.$$

Or l'on a, par suite des données de la question, les relations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{D_2} = 0, \quad \sin a_1 = \sin a_2, \\ \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{2}{R \sin a_1}; \quad \dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_1} = \dfrac{2}{R}. \end{array} \right.$$

On connaît donc aussi les coordonnées tangentielles de la seconde courbe, soit analytiquement, soit géométriquement. On voit que r_2 se construit par la proportion harmonique; et l'on sait que pour $R = 2N_1$, N_1 devient infini, et que pour des valeurs plus grandes il devient négatif.

Rayons de courbure. — La formule (5) du n° 82 devient, par suite de l'hypothèse présente,

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3 \sin a_1} - \left(\frac{1}{N_1^2} + \frac{1}{RD_1}\right)\frac{\cos a_1}{\sin a_1} + \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3 \sin a_1} + \left(\frac{1}{N_2^2} - \frac{1}{RD_1}\right)\frac{\cos a_1}{\sin a_1} = \frac{2R'}{R^3},$$

Or si l'on remarque que $\dfrac{1}{N_1} - \dfrac{1}{N_2} = \dfrac{2}{D_1}$ et que par suite $\left(\dfrac{1}{N_1^2} - \dfrac{1}{N_2^2}\right) = \dfrac{4}{RD_1}$, on obtient l'équation simplifiée

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3} + \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} - \frac{6 \cos a_1}{RD_1} = \frac{2R' \sin a_1}{R^3}.$$

Si la courbe directrice, qui est ici la courbe réfléchissante,

est un cercle, on a

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3} + \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = \frac{6\cos a_1}{RD_1}.$$

Si c'est une ligne droite, on trouve

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3} + \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = 0.$$

Dans le cas où l'une des deux courbes conjuguées, la courbe σ_1, par exemple, est un point, la formule relative aux rayons de courbure devient

$$\mathfrak{R}_2 = 6\frac{N_2^3}{RD_1}\cos a_1 + 2\frac{R'N_2^3}{R^3}\sin a_1.$$

Loi des aires. — Elle est exprimée par la relation

$$(6) \qquad \frac{1}{du_1} + \frac{1}{du_2} = \frac{2}{\sin^2 a_1\, dv}.$$

Loi des arcs. — On trouve sans difficulté l'équation suivante

$$d(\sigma_1 - r_1) + d(\sigma_2 - r_2) = 0;$$

ou, en l'intégrant, si l'on représente par (σ_1), (r_1), (σ_2), (r_2) les valeurs initiales de σ_1, r_1, σ_2, r_2, on obtient

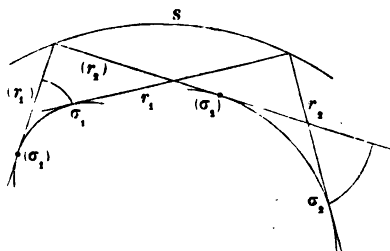
$$(7) \quad [\sigma_1 - (\sigma_1)] - [r_1 - (r_1)] + [\sigma_2 - (\sigma_2)] - [r_2 - (r_2)] = 0.$$

Sous cette forme on voit que, si l'une des courbes est rectifiable, sa conjuguée l'est aussi.

Si l'on conçoit un fil de longueur constante (*fig.* 21) fixé par chacune de ses extrémités à deux points correspondants des courbes conjuguées σ_1, σ_2, et tendu par un style de manière à s'enrouler ou se dérouler sur ces deux courbes, le style se trouvant dans une position sur la directrice, il restera constamment sur cette directrice et la décrira dans son mouvement. Les arcs sont de même signe lorsque les fils s'enve-

loppent à la fois; ils sont de signes contraires lorsqu'un fil s'enveloppe et l'autre se développe.

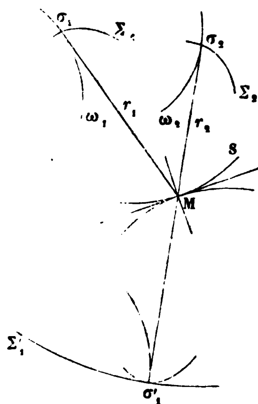
Fig. 21.



Il faut remarquer que les courbes σ_1, σ_2 sont réciproques l'une de l'autre, de sorte que, si le point lumineux parcourt la courbe σ_2 en projetant sa lumière tangentiellement à cette courbe, la caustique par réflexion sera σ_1.

85. *Des développantes des caustiques par réflexion.* — Considérons (*fig.* 22) deux développantes $\sigma_1\Sigma_1$, $\sigma_2\Sigma_2$ des arcs

Fig. 22.



$\omega_1\sigma_1$, $\omega_2\sigma_2$, lesquelles passent par deux points correspondants σ_1, σ_2 de ces deux arcs; si l'on admet que l'une de ces

deux développantes, $\sigma_1 \Sigma_1$, est une courbe lumineuse projetant la lumière suivant ses normales, et que la courbe s est la courbe réfléchissante, la rencontre des rayons incidents produit la développée $\omega_1 \sigma_1$, et le lieu des rayons réfléchis par la courbe s produit la caustique par réflexion $\omega_2 \sigma_2$. De même, en considérant $\sigma_2 \Sigma_2$ comme une courbe lumineuse, le lieu des rayons incidents sera la développée $\omega_2 \sigma_2$, et la courbe $\omega_1 \sigma_1$ sera la caustique par réflexion. On regarde les deux courbes lumineuses comme conjuguées par rapport à la courbe réfléchissante, et l'égalité (7) du numéro précédent prouve que la somme des rayons conjugués de ces deux courbes lumineuses par rapport à la courbe réfléchissante s, comptés à partir des deux développantes $\sigma_1 \Sigma_1$, $\sigma_2 \Sigma_2$, est constante.

Concevons que, par un point M de cette courbe réfléchissante, on mène une tangente à cette courbe, et que l'on prenne les courbes symétriques par rapport à cette tangente, et de la courbe réfléchissante s et de la courbe lumineuse $\sigma_1 \Sigma_1$, et qu'ensuite on fasse rouler sur la courbe réfléchissante sa courbe symétrique, de telle sorte qu'elle entraîne dans son mouvement le plan qui la contient, la courbe symétrique de $\sigma_1 \Sigma_1$ enveloppera dans ce mouvement une courbe dont le rayon de courbure sera la somme du rayon réfléchi r_2 et de son prolongement; et, par conséquent, cette courbe enveloppe aura pour développée $\omega_2 \sigma_2$, caustique par réflexion de la courbe lumineuse $\omega_1 \sigma_1$. Cette enveloppe $\sigma'_1 \Sigma'_1$ et la courbe $\sigma_2 \Sigma_2$ sont donc deux courbes développantes de la caustique par réflexion de la courbe lumineuse $\sigma_1 \Sigma_1$.

Il est inutile de remarquer que l'on peut faire la même construction sur la courbe lumineuse conjuguée $\sigma_2 \Sigma_2$, et que l'on obtiendra des résultats réciproques des précédents.

Si, dans les différentes positions de la courbe symétrique de $\omega_1 \sigma_1$, on mène des tangentes communes à cette courbe symétrique et à la courbe $\omega_2 \sigma_2$, le lieu des points de contact pris sur la courbe symétrique de $\omega_1 \sigma_1$ est le lieu des symétriques des centres de courbure de la développante de $\sigma_1 \Sigma_1$.

Si la courbe $\omega_1 \sigma_1$ se réduit à un point, le lieu des symétriques de ce point est une développante de la courbe $\omega_2 \sigma_2$.

Tout cercle dont ce point est le centre étant une dévelop-

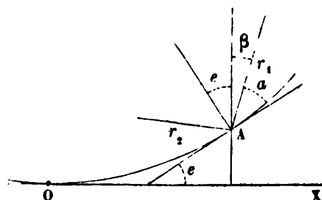
pante de ce point, enveloppe, après le retournement, deux arcs de courbe qui appartiennent à une double développante de la courbe $\omega_2 \sigma_2$.

Si le point passe à l'infini dans une direction donnée, la développante correspondante passe à l'infini, et toute droite perpendiculaire à cette direction a pour correspondante une développante de la courbe $\omega_2 \sigma_2$.

86. *Caustique d'une droite lumineuse.* — Dans ce cas, les rayons incidents ont une direction invariable, et cette circonstance simplifie les équations du problème.

Rayon réfléchi. — Soit Ar_1 la direction (*fig.* 23) du rayon

Fig. 23.



incident, Ar_2 celle du rayon réfléchi; ce dernier rayon est donné par l'équation

$$r_2 = \frac{R}{2} \sin a_1.$$

Soit β l'angle que le rayon incident fait avec une perpendiculaire à l'axe Ox, on a les deux équations

$$a_1 + e + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{ds}{de} = \varphi(e);$$

par suite, la valeur du rayon réfléchi est donnée par la relation

$$(1) \qquad r_2 = \frac{1}{2} \varphi(e) \cos(e + \beta).$$

Lorsque β prend toutes les valeurs possibles, a_1 prend aussi toutes les valeurs possibles; on voit donc que, lorsque la

droite lumineuse varie d'une manière quelconque, l'image réfléchie par un point de la courbe réfléchissante se meut sur une circonférence de cercle dont le diamètre est $\frac{R}{2}$.

Coordonnées rectangles. — Soient x, y les coordonnées du point pris sur la courbe, et x', y' les coordonnées de l'extrémité du rayon réfléchi; on a les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x - x' &= r_2 \sin(2e + \beta), \\ y - y' &= r_2 \cos(2e + \beta); \\ x &= \int_0^e \frac{ds}{de} \cos e\, de, \\ y &= \int_0^e \frac{ds}{de} \sin e\, de. \end{aligned}\right.$$

On a donc les coordonnées x', y' en fonction de la variable e, et en éliminant e entre ces deux dernières équations, on obtient l'équation de la courbe dans le système cartésien.

Rayon de courbure. — Dans le cas où la courbe σ_1 se réduit à un point, on a $\mathfrak{R}_1$ nul, et, par suite, on obtient la relation

$$(4)\quad \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = 6\frac{\cos a_1}{RD_1} + \frac{2R'}{R^3}\sin a_1.$$

Si ce point se transporte à l'infini, la formule

$$\frac{\sin a_1}{r_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D_1}$$

devient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{D_1} = 0.$$

Conséquemment, si on élimine D_1 entre cette équation et l'équation (4), on obtient la nouvelle relation

$$(5)\quad \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = \frac{6R}{R^3}\cos a_1 - \frac{2R'}{R^3}\sin a_1.$$

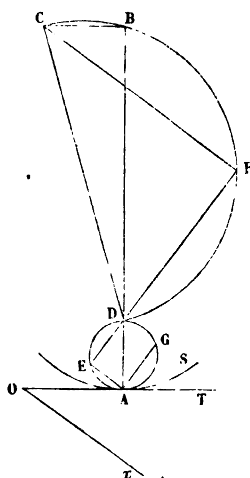
Or on a $R = 2N_2$; l'équation précédente deviendra donc

$$(5') \qquad 4\mathfrak{R}_2 = 3R\cos a_1 - R'\sin a_1;$$

de là on tire le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Au point* A (*fig.* 24) *pris sur la courbe réfléchissante, et dans la direction du rayon de courbure, prenez*

Fig. 24.



une longueur AB *égale à trois fois ce rayon; au point* B *menez une perpendiculaire* BC *égale au rayon de courbure de la développée; sur la sixième de* AB *comme diamètre, décrivez un cercle, et sur* CD *comme diamètre, décrivez un autre cercle. Cela posé, si du point* A *l'on mène* AE *sous l'inclinaison* a_1 *avec la tangente* AT, AE *est le rayon tangentiel de la caustique, et* EF *est égal à quatre fois le rayon de courbure de cette caustique.*

Équation naturelle de la caustique. — Soit $\varphi(e) = R$ l'équation élémentaire de la courbe réfléchissante rapportée à un axe Ox parallèle à la droite lumineuse, on a les relations

angulaires

$$e = \frac{\pi}{2} - a_1 = \frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

On aura donc aussi la relation

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} &= \frac{3}{4}\varphi\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\varphi'\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

qui est l'équation naturelle de la caustique.

Si la droite lumineuse et l'axe Ox de la courbe font entre eux l'angle β, on a la relation

$$e = \frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4},$$

et l'on obtient l'équation suivante :

$$(6')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} &= \frac{3}{4}\varphi\left(\frac{\varepsilon_2 - \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_2 + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\varphi'\left(\frac{\varepsilon_2 - \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon_2 + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

qui, dans le cas actuel, est l'équation naturelle de la caustique.

Relations entre les rayons de courbure des différentes caustiques. — Soit AG' perpendiculaire à la droite lumineuse formant l'angle β avec AG perpendiculaire à l'axe Ox. Si l'on appelle $\mathfrak{R}_\beta$ la valeur de $\mathfrak{R}_2$ correspondant à l'angle β, et qu'on remarque que l'on a la relation

$$a_1 = \frac{\pi}{2} - e - \beta,$$

la formule (5') donne l'équation

$$4\mathfrak{R}_\beta = 3R\sin(e+\beta) - R'\cos(e+\beta).$$

On déduit les équations suivantes :

$$4\mathfrak{R}_0 = 3R\sin e - R'\cos e,\quad 4\mathfrak{R}_{\frac{\pi}{2}} = 3R\cos e + R'\sin e;$$

conséquemment on obtient

$$\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_0 \cos\beta + \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \sin\beta, \quad \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}+\beta} = -\mathcal{R}_0 \sin\beta + \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \cos\beta,$$

desquelles on déduit

$$\mathcal{R}_\beta^2 + \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}+\beta}^2 = \mathcal{R}_0^2 + \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{3^2}{4^2} R^2 + \frac{1}{4^2} R'^2,$$

Ces relations, d'une interprétation facile, et plusieurs autres, se déduisent aussi directement du théorème précédent.

87. *Applications.* — 1° La courbe réfléchissante est un cercle $\frac{ds}{de} = b$. On trouve l'équation suivante :

$$\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) b \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

La caustique est donc une épicycloïde décrite par un point de la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{b}{4}$, qui roule sur un cercle dont le rayon est $\frac{b}{2}$, et concentrique au cercle donné.

2° La courbe réfléchissante est une cycloïde. Il y a deux cas à considérer : le cas où la droite lumineuse est parallèle à la base de la cycloïde et celui où la droite lumineuse a une position quelconque.

Premier cas. — L'équation de la cycloïde est (n° 24),

$$\frac{ds}{de} = 2m \cos e,$$

m étant le diamètre du cercle générateur ; on aura donc, réductions faites,

$$\mathcal{R}_2 = m \sin 2e;$$

or on a la relation angulaire

$$2e = \varepsilon_2 - \frac{\pi}{2};$$

par suite, l'équation précédente deviendra

$$\mathcal{R}_2 = m \cos \varepsilon_2.$$

De là on conclut que la caustique est une cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre $\frac{m}{2}$.

Deuxième cas. — La droite réfléchissante ayant une position quelconque par rapport à l'axe de la cycloïde, soit β l'angle de cette droite avec l'axe, on obtient l'équation naturelle de la caustique

$$4\mathcal{R}_2 = 2m\left[\sin\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right],$$

et, après réductions,

$$\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = m \cos \varepsilon_2 + \frac{m}{2}\sin\beta,$$

équation qui représente une courbe parallèle de la cycloïde engendrée par le cercle dont le diamètre est $\frac{m}{4}$, ou, ce qui est la même chose, une développante de cycloïde.

3° La courbe réfléchissante est une chaînette. On a (n° 29) l'équation naturelle de la chaînette

$$\frac{ds}{de} = \frac{b}{\sin^2 e};$$

conséquemment on a les deux relations

$$R = \frac{b}{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad R' = -\frac{b\cos\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)};$$

par suite, la formule (5) du n° 86 donne

$$\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = \frac{b}{8} \frac{5\cos\beta - \sin\varepsilon_2}{\sin^2\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)},$$

qui est l'équation élémentaire de la caustique.

88. *Applications* (suite). — 4° *Hypocycloïde.* Considérons l'hypocycloïde dont l'équation naturelle est

$$(1) \qquad \frac{ds}{de} = 8R\cos(3e + \gamma),$$

dans laquelle R et γ sont des constantes.

Nous avons trouvé l'équation

$$4\mathfrak{R}_2 = -\varphi'_e(e)\cos(e + \beta) + 3\varphi(e)\sin(e + \beta);$$

elle devient

$$\mathfrak{R}_2 = 6R\sin(4e + \beta + \gamma),$$

et, ayant égard à la relation

$$4e = 2(\varepsilon_2 - \beta) - \pi,$$

on obtient

$$(2) \qquad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = 6R\cos\left(2\varepsilon_2 - \beta + \gamma + \frac{\pi}{2}\right);$$

or l'équation élémentaire de l'hypocycloïde engendrée par un cercle de diamètre égal à $\rho_2 - \rho_1$ et roulant sur un cercle ρ_2 est (n° 59)

$$(3) \qquad \frac{ds}{de_1} = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1}\cos\frac{\rho_2}{\rho_1}e_1.$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (1), il faut poser

$$\rho_2 = 3R, \quad \rho_1 = R,$$

avec la condition

$$3e_1 = 3e + \gamma;$$

pour identifier la même équation avec l'équation (2), il faut poser

$$\rho_2 = 4R, \quad \rho_1 = 2R,$$

avec la condition

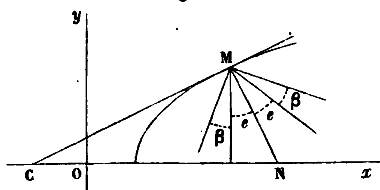
$$2e_1 = 2\varepsilon_2 - \beta + \gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi la première hypocycloïde est formée par un cercle de rayon R qui roule sur la concavité d'un cercle de rayon triple, et la deuxième hypocycloïde est formée par un cercle de rayon 2R qui roule sur la concavité d'un cercle de rayon double. De là on conclut :

La caustique d'une hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon R *roulant sur la concavité d'un autre cercle de rayon triple est une hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon* R *qui roule sur la concavité d'un cercle de rayon quadruple.*

5° *La courbe réfléchissante est une parabole.* — Supposons en premier lieu l'axe parallèle à la ligne lumineuse AB (*fig.* 25).

Fig. 25.



En employant la notation du n° 20, on a l'équation de la parabole en coordonnées rectangles et l'équation en coordonnées naturelles

$$(1') \qquad y^2 = 2b\left(\frac{b}{2} - x\right), \quad R = \frac{b}{\sin^3 e};$$

on déduit de ces équations les suivantes :

$$(2') \qquad y = b \cot e, \quad x = \frac{b}{2}\frac{1}{\sin^2 e}, \quad MN = \frac{b}{\sin e};$$

le rayon réfléchi aura donc l'une des deux formes suivantes :

$$(3') \qquad r_1 = \frac{R}{2}\cos e, \quad r_1 = \frac{b}{2}\frac{\cos e}{\sin^3 e}.$$

Coordonnées rectangles de la caustique. — Soient x', y' ces coordonnées, on a les équations

$$(4') \qquad x' = x + r_1 \sin 2e, \quad y' = y - r_1 \cos 2e.$$

Donc, si l'on élimine de ces équations x et y au moyen des précédentes, on obtient les valeurs des coordonnées x' et y' en fonction de e

$$(5') \quad x' = \frac{b}{2\sin^2 e}(3 - 2\sin^2 e), \quad y' = b\cot e\left(\frac{4\sin^2 e - 1}{2\sin^2 e}\right).$$

L'équation de la courbe en coordonnées rectangles s'obtient par l'élimination de e entre ces deux équations; on trouve ainsi

$$(6') \qquad 27y^2 = (5b - x)^2(2x - b).$$

Supposons en second lieu la droite réfléchissante ayant une position quelconque par rapport à l'axe de la parabole, et soit β l'angle que la perpendiculaire à cette droite réfléchissante forme avec l'axe des y, on aura les formes suivantes du rayon réfléchi r_1 :

$$(7') \quad r_1 = \frac{R}{2}\cos(\beta + e) = \frac{b}{2}\frac{\cos(\beta + e)}{\sin^3 e} = y\frac{\cos\beta}{2\sin^2 e} - x\sin\beta.$$

Conséquemment les coordonnées rectangles de la caustique seront

$$(8') \quad \begin{cases} x' = \dfrac{b}{2\sin^2 e}\left[1 + \dfrac{\cos(e+\beta)\sin(2e+\beta)}{\sin e}\right], \\ y' = \dfrac{b}{\sin e}\left[\cos e - \dfrac{\cos(e+\beta)\cos(2e+\beta)}{2\sin^2 e}\right]. \end{cases}$$

Rayon de courbure. — Nous trouvons, en faisant usage de

la méthode précédente et en supposant l'axe de la parabole parallèle à la ligne lumineuse, l'équation suivante :

$$(9)\qquad \mathfrak{R}_2 = -\frac{3}{4}\frac{b}{\sin^4 e};$$

or on a la condition angulaire

$$(10)\qquad e = \frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\pi}{4};$$

on obtient donc $\mathfrak{R}_2$ sous l'une des deux formes suivantes :

$$(9')\qquad \mathfrak{R}_2 = -\frac{3}{4}\frac{b}{\sin^4\left(\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},\quad \mathfrak{R}_2 = -\frac{3b}{(1-\sin\varepsilon_2)^2},$$

par lesquelles le rayon de courbure de la caustique est exprimé en fonction de l'angle ε_2 que la tangente à la caustique fait avec l'axe des x. De là résulte que l'équation élémentaire de la caustique est

$$(10')\qquad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = -\frac{3}{4}\frac{b}{\sin^4\left(\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Dans le cas où la droite lumineuse a une direction quelconque, on obtient les équations suivantes :

$$(11)\qquad r_2 = \frac{b}{2}\frac{\cos(e+\beta)}{\sin^3 e},\quad \mathrm{R} = \frac{b}{\sin^3 e};$$

conséquemment on trouve la relation

$$(12)\qquad \mathfrak{R}_2 = -\frac{3}{4}b\frac{\cos\beta}{\sin^4 e},$$

et, si l'on a égard à la relation $2e = \varepsilon_2 - \beta - \frac{\pi}{2}$, on obtient l'équation naturelle de la caustique sous l'une des deux formes

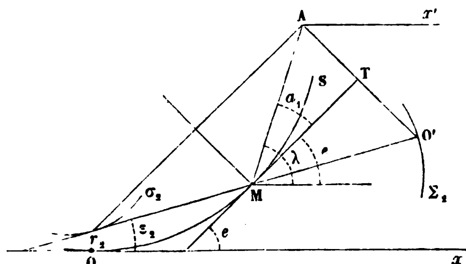
suivantes :

$$(12') \quad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = -\frac{3}{4}\frac{b\cos\beta}{\sin^4\left(\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{3b\cos\beta}{[1-\sin(\varepsilon_2-\beta)]^2}.$$

Il est évident que l'on passe de l'un à l'autre cas par le changement de ε_2 en $\varepsilon_2 - \beta$, et de b en $b\cos\beta$; par conséquent les deux courbes sont semblables (n° 34).

89. ***Caustiques par rapport à un cercle lumineux.*** — Soient OM (*fig.* 26) la courbe réfléchissante et A le centre du cercle

Fig. 26.



lumineux, M un point quelconque pris sur la courbe réfléchissante, λ l'angle que le rayon incident fait avec l'axe des x; on a les relations suivantes, qui donnent la solution complète de la question.

Rayon réfléchi. — L'équation de ce rayon est la suivante :

$$(1) \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{R\sin a_1};$$

on a les conditions angulaires

$$(2) \qquad a_1 = \lambda - e, \quad \sin a_1 = \sin\lambda\cos e - \cos\lambda\sin e;$$

or les valeurs de $\cos\lambda$, $\sin\lambda$ sont données par les relations

$$(3) \qquad \cos\lambda = \frac{x_1 - x}{r_1}, \quad \sin\lambda = \frac{y_1 - y}{r_1};$$

conséquemment on a

$$(3')\qquad \begin{cases} \sin a_1 = \dfrac{y_1 - y}{r_1}\cos e - \dfrac{x_1 - x}{r_1}\sin e, \\ r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \end{cases}$$

Donc, si l'on remarque que par la nature de la courbe réfléchissante R, x, y sont connues en fonction de e, on voit que r_1, r_2, a_2 sont aussi connues en fonction de e. De plus l'équation

$$(4)\qquad \frac{\sin a_1}{r_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D_1}$$

donne $\frac{1}{D_1}$ en fonction de e.

Coordonnées rectangles. — On a les équations suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} x - x_2 = r_2\cos(2a_1 - \lambda) = r_2\cos(\lambda - 2e), \\ y - y_2 = r_2\sin(2a_1 - \lambda) = r_2\sin(\lambda - 2e); \end{cases}$$

or x et y sont données en fonction de e; il suffit donc d'éliminer cette variable entre ces deux équations pour obtenir l'équation de la courbe entre les variables x_2, y_2.

Rayon de courbure. — On trouve sans difficulté l'équation

$$(6)\qquad \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = \frac{6}{RD_1}\cos a_1 + \frac{2R'}{R^3}\sin a_1;$$

$\mathfrak{R}_2$ sera donc connue en fonction de e; or $\varepsilon_2 - 2e = \pi - \lambda$; λ est connu en fonction de e, par suite $\mathfrak{R}_2$ est connu en fonction de ε_2; on a donc l'équation élémentaire de la caustique.

Si la courbe réfléchissante est un cercle, il faut poser R' nul; par suite, l'équation (6) devient

$$(6')\qquad \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} = \frac{6\cos a_1}{RD_1}.$$

Développante de la caustique. — Portons-nous au cas général et cherchons les propriétés de la caustique par rapport à un point lumineux fixe A (*fig.* 26). Soient Γ_2 et Σ_2 le

rayon de courbure et l'arc de la développante de la caustique, on a les équations

$$(7) \qquad \Gamma_2 = r_1 + r_2, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\mathrm{R}\sin a_1},$$

d'où l'on tire la relation

$$(7') \qquad \frac{1}{\Gamma_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\dfrac{2r_1^2}{\mathrm{R}\sin a_1}},$$

laquelle donne le rayon de courbure $O'r_2$ de la développante $O'\Sigma_2$.

Relations entre les angles e et a_1. — Rapportons la courbe réfléchissante Os au point A comme pôle et à la ligne Ax' comme axe polaire, et soit $r_1 = F(\theta)$ l'équation polaire de cette courbe, θ étant l'angle que le rayon vecteur r_1 fait avec l'axe Ax'; on a les relations angulaires

$$(8) \qquad e + a_1 + \theta = \pi, \quad \cos e = -\cos(a_1 + \theta);$$

si on développe le cosinus et que l'on ait égard aux expressions suivantes

$$\cos a_1 = \frac{dr_1}{ds}, \quad \sin a_1 = \frac{r_1\,d\theta}{ds},$$

on obtient l'équation suivante :

$$(9) \qquad \cos e = -\cos\theta\,\frac{dr_1}{ds} + \sin\theta\,\frac{r_1\,d\theta}{ds},$$

qui donne e en fonction de θ, et par conséquent en fonction de a_1.

Équation élémentaire de la développante. — Soit E_2 l'angle que la tangente à cette courbe fait avec l'axe Ox; on a les relations

$$(10) \qquad a_1 + a_2 = \pi, \quad e - \varepsilon_2 = a_1, \quad E_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2;$$

de là résulte que l'équation (7′) fait connaître Γ_2 en fonction

de E_2, ou, ce qui est la même chose, $\frac{d\Sigma_2}{dE_2}$ en fonction de E_2. On a donc l'équation naturelle de la développante de la caustique.

Équation polaire de la développante. — Posons AO′ égale à ρ, et représentons par ω l'angle $O'Ax'$, nous avons les relations

$$(11) \qquad \rho = 2r_1 \sin a_1 = 2r_1^2 \frac{d\theta}{ds};$$

or, si l'on remarque que l'on a les relations angulaires

$$(12) \qquad \theta - \omega + a_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \tang\omega = -\cot(\theta + a_1),$$

on aura

$$(13) \qquad \tang\omega = \frac{r_1 \sin\theta\, d\theta - \cos\theta\, dr_1}{r_1 \cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr_1}.$$

On a donc, par l'équation (11), ρ en fonction de θ, et par l'équation (13), ω en fonction du même angle; ces équations sont donc les équations de la développante.

On trouverait avec la même facilité les équations polaires de la caustique $r_2\sigma_2$ elle-même.

Remarque. — Si l'on retourne la courbe lumineuse autour d'une de ses tangentes, et que l'on fasse rouler la courbe ainsi obtenue sur la première, le point lumineux engendre la développante de la caustique, et tout cercle lumineux ayant ce point pour centre enveloppe deux développantes de la caustique; la question des caustiques par réflexion est donc un cas particulier des roulettes.

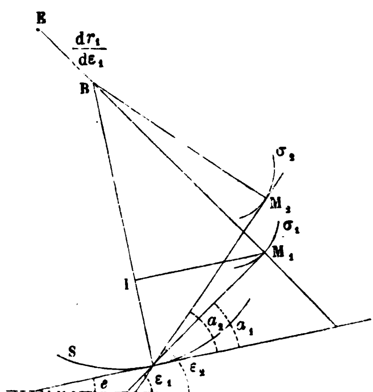
§ IV. — Des podaires.

90. Problème IV. — *Le sommet d'un angle constant c (fig. 27) se meut sur une courbe directrice s pendant qu'un de ses côtés enveloppe une courbe donnée σ_1; trouver la courbe σ_2 enveloppe de l'autre côté.*

On appelle *podaire* le lieu des pieds des perpendiculaires

abaissées d'un point sur les tangentes à une courbe. Le problème que nous venons de poser est la généralisation du pro-

Fig. 27.



blème inverse des podaires, puisqu'il n'y a qu'à supposer l'angle c droit et la courbe σ_1 se réduisant à un point pour passer du premier cas au second.

Conditions du problème. — Elles sont données par les relations

$$(1)\qquad a_2 - a_1 = c = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

Coordonnées tangentielles. — La relation (1) donne D_1 égal à D_2; conséquemment on a

$$(2)\qquad \frac{\sin\alpha_2}{r_2} - \frac{\sin a_1}{r_1} = 0, \quad \frac{1}{N_2} = \frac{1}{N_1}.$$

Cette équation indique que les longueurs N_1, N_2 interceptées sur la normale à la directrice par les normales aux courbes conjuguées σ_1, σ_2 sont égales; de là on déduit :

Théorème. — *Les trois normales aux trois courbes en des points correspondants sont concourantes.*

On en déduit la construction par points de la courbe conjuguée σ_2.

Rayon de courbure. — L'équation (5) du n° 83 donne, quand on a égard aux relations (1) et (2), la formule suivante :

$$(5)\qquad \left(\frac{\mathcal{R}_2}{\sin a_2} - \frac{\mathcal{R}_1}{\sin a_1}\right)\frac{1}{N_1^2} = -\frac{\sin c}{\sin a_2 \sin a_1}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{D_1}\right),$$

de laquelle on déduit l'équation

$$(5')\qquad \mathcal{R}_2 \sin a_1 = \mathcal{R}_1 \sin a_2 + \left(\frac{N_1^2}{R} - 2N_1\right)\sin c,$$

qui donne une construction géométrique facile du rayon de courbure.

Rectification. — On a la relation

$$d\sigma_2 = dr_2 + \cos a_2 ds.$$

Si l'on remplace a_2 par sa valeur tirée de l'équation (1), qu'on développe et qu'on remplace $\sin a_1$, $\cos a_1$ par leurs valeurs en fonction des éléments de la courbe σ_1, on aura la formule

$$(4)\qquad d\sigma_2 - dr_2 = \cos c(d\sigma_1 - dr_1) - \sin c\, r_1\, d\varepsilon_1;$$

or, dans la question présente, r_1 est connu en fonction de ε_1; soit $r_1 = \varphi(\varepsilon_1)$ cette fonction, on aura l'intégrale

$$(4')\qquad \sin c \int \varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1 = (\sigma_1 - r_1)\cos c - (\sigma_2 - r_2),$$

laquelle fait connaître l'arc σ_2 au moyen d'une quadrature.

Quadrature. — On a la relation

$$(7)\qquad du_2 = \frac{1}{2} r_2^2 d\varepsilon_2 = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{\sin^2 a_2}{\sin^2 a_1} d\varepsilon_1.$$

Si l'on remplace a_2 par sa valeur tirée de l'équation (1), qu'on développe et qu'on substitue dans les résultats les valeurs de $\sin a_1$, $\cos a_1$, on aura la relation

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} du_2 = {} & \frac{r_1^2 d\varepsilon_1}{2}\cos^2 c + r_1 \frac{d(\sigma_1 - r_1)d\varepsilon_1}{d\varepsilon_1}\cos c \sin c \\ & + \frac{d[(\sigma_1 - r_1)]^2}{2d\varepsilon_1}\sin^2 c. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on remarque que la sous-normale s_n de la courbe σ_1 a pour expression $\frac{d(\sigma_1 - r_1)}{d\varepsilon_1}$, et qu'on porte sur la tangente à cette courbe, à partir du point de contact, deux longueurs, l'une égale à la sous-normale, et l'autre à une moyenne proportionnelle entre cette sous-normale et le rayon tangentiel r_1, en appelant v, w les aires balayées par ces deux longueurs dans le mouvement de la tangente d'une position à une autre, l'équation précédente donnera par son intégration la relation suivante :

$$(6') \qquad u_2 = u_1 \cos^2 c + v \sin 2c + w \sin^2 c.$$

Discussion des formules. Applications. — Examinons en particulier le cas où la courbe σ_1 est un point. La formule (5′) devient

$$(5'') \qquad \mathfrak{R}_2 \sin a_1 = \left(\frac{N_1^2}{R} - 2N_1\right) \sin c;$$

la formule (4′) donne

$$(4'') \qquad \sigma_2 - r_2 + r_1 \cos c = -\sin c \int \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1;$$

et la formule (6)

$$(6'') \qquad u_2 = u_1 \cos^2 c - \frac{1}{2} r_1^2 \sin c \cos c + w \sin^2 c;$$

w est ici l'aire engendrée par les déplacements successifs de la sous-normale à la courbe σ_1.

Équation de la courbe σ_2 en coordonnées polaires. — Dans la même hypothèse, on peut facilement exprimer l'équation de la courbe en coordonnées polaires.

Soit ε_1 (*fig.* 28) l'angle du rayon r_1 avec une droite fixe, et θ l'angle de $\sigma_1 M$ avec le même axe, $\sigma_1 M$ étant le rayon vecteur ρ de la courbe σ_2. Il s'agit de calculer ρ et θ en fonction d'une seule variable; on a, puisque le quadrilatère ANMσ_1 est inscriptible,

$$a_1 = \sigma_1 MA, \quad a_2 = M_1 \sigma_1 A.$$

Or on a la relation

$$(8)\qquad \theta = a_2 + \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Fig. 28.

Donc

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}a_2 - \cot\varepsilon_1}{1 + \operatorname{tang}a_2 \cot\varepsilon_1};$$

et, en remplaçant dans cette formule $\operatorname{tang}a_2$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on obtient la relation

$$(9')\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{(dr_1 + r_1\,d\varepsilon_1 \cot\varepsilon_1)\operatorname{tang}c + (r_1\,d\varepsilon_1 + \cot\varepsilon_1)}{(r_1\,d\varepsilon_1 - dr_1 \cot\varepsilon_1)\operatorname{tang}c + (dr_1 - r_1\,d\varepsilon_1 \cot\varepsilon_1)};$$

d'une autre part, le triangle σ_1 MA donne l'équation

$$(10)\qquad \rho = r_1 \frac{\sin c}{\sin a_1} = \frac{ds}{d\varepsilon_1}\sin c.$$

On a donc les deux coordonnées polaires ρ et θ en fonction d'une seule variable ε_1.

Applications des formules précédentes. — 1° La directrice s est un cercle, et l'une des deux courbes conjuguées est une épicycloïde tangente en son sommet à ce cercle, et engendrée par un cercle d'un diamètre m roulant sur un cercle concentrique au cercle fixe.

Si l'on rapporte cette épicycloïde aux coordonnées r_1 et a_1, son équation (59) sera

$$r_1 = m \sin a_1;$$

d'après cela, l'équation (2) du n° 90 donnera la relation

$$r_2 = m \sin a_2;$$

l'enveloppe est donc une épicycloïde égale à l'épicycloïde donnée, tangente aussi en son sommet au cercle directeur s, mais en un autre point.

2° La directrice s est une droite, et la courbe σ_1 est un cercle tangent à cette droite. Si l'on rapporte ce cercle à cette droite dans le système tangentiel, on a la relation (*fig.* 29)

$$\frac{r_1}{\mathfrak{R}_1} = \tang \frac{1}{2} a_1;$$

Fig. 29.

par suite l'équation (2) donne

$$r_2 = \frac{\mathfrak{R}_1}{2} \frac{\sin a_2}{\cos^2 \frac{1}{2}(a_2 - c)} = \mathfrak{R}_1 \frac{\sin a_2}{1 + \cos(a_2 - c)},$$

qui est l'équation de la courbe conjuguée dans le même système de coordonnées. Si l'angle c est droit, on a

$$r_2 = \mathfrak{R}_1 \frac{\sin a_2}{1 + \sin a_2}.$$

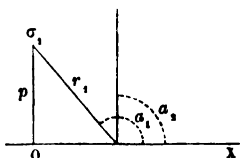
La formule (5′) donne la relation suivante

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\mathfrak{R}_1}{\sin(a_2 - c)}\left[\sin a_2 - \frac{\sin c}{\cos^2 \frac{1}{2}(a_2 - c)}\right],$$

qui est l'équation naturelle de la courbe conjuguée σ_2.

3° Si, la directrice étant une droite (*fig.* 30), la courbe σ_1 est

Fig. 30.



un point, p_1 étant la distance du point à la droite, on a l'équation

$$r_1 = \frac{p_1}{\sin a_1};$$

la formule (5′) du n° 90 donne

$$\mathfrak{R}_2 = -\frac{2p \sin c}{\sin^3(a_2 - c)},$$

qui est l'équation naturelle d'une parabole. Ainsi *la parabole est l'enveloppe d'un côté d'un angle constant dont le sommet parcourt une ligne droite, et dont l'autre côté passe par un point fixe.*

§ V. — Des courbes conjuguées d'après la loi $\Sigma A \cos a = \text{const.}$

91. Problème V. — *Un point matériel est soumis à l'action de n forces constantes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *agissant suivant les directions des éléments de n courbes* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$, *décrit une trajectoire s d'un mouvement uniformément accéléré; trouver les lois qui régissent ces courbes.*

Conditions du problème. — Puisque le mouvement sur la

courbe s est uniformément accéléré, il faut que la deuxième dérivée de s par rapport au temps soit une constante c. Or cette dérivée est égale à la projection de la résultante des forces sur la tangente à la courbe s; on aura donc la condition

$$(1) \qquad \Sigma \mathrm{A} \cos a = c.$$

Loi des tangentes. — Les tangentes sont données par les équations suivantes :

$$(2) \qquad \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}} \sin a, \quad \sum \frac{\mathrm{A} \sin^2 a}{r} = \frac{1}{\mathrm{R}} \sum \mathrm{A} \sin a;$$

$$(3) \quad s = \int_0^e \mathrm{R}\, de = \int_{(a_1)}^{a_1} \mathrm{D}_1\, da_1 = \int_{(a_2)}^{a_2} \mathrm{D}_2\, da_2 = \ldots = \int_{(a_n)}^{a_n} \mathrm{D}_n\, da_n.$$

Loi des rayons de courbure. — On déduit sans difficulté de l'équation (5) du n° 81 la formule suivante, qui se construit géométriquement,

$$(5) \sum \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}^3}\left[\mathcal{R} - \left(\mathrm{N} + \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{D}}\right)\cos a - \mathrm{R}' \frac{\mathrm{N}^3}{\mathrm{R}^3} \sin a\right] + \sum \frac{\mathrm{A} \cos a}{\mathrm{D}^2} = 0.$$

Loi des arcs. — On a n relations telles que

$$d(\sigma - r) = \cos a\, ds.$$

Si l'on multiplie chacune d'elles respectivement par A_1, $\mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, et qu'on ajoute, en ayant égard à la relation (1), on trouve l'équation

$$(6) \qquad \Sigma \mathrm{A}\, d(\sigma - r) = c\, ds.$$

Si on l'intègre entre limites, on trouve l'équation sous termes finis

$$(6') \qquad \Sigma \mathrm{A}[\sigma - (\sigma) - r + (r)] = c[s - (s)];$$

on déduit de cette équation le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les mêmes conditions étant données que dans le problème V, si toutes les courbes conjuguées et la*

courbe directrice s, moins une de ces courbes, sont rectifiables, cette dernière sera aussi rectifiable.

Ainsi, par exemple, si toutes les courbes conjuguées sont rectifiables, la courbe s sera rectifiable.

En effet, soit $\beta = \varphi(\alpha)$ l'équation d'une courbe σ en coordonnées rectangles, et $y = f(x)$ l'équation de la *trajectoire s* dans le même système; puisque le point mobile se trouve sur la tangente à la courbe σ, il en résulte que les α, β sont des fonctions de x; les σ et les r sont donc aussi des fonctions de x; donc, après substitution de ces valeurs dans l'équation (6′), on aura s en fonction de x. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Si les n courbes conjuguées se réduisent à des points, la directrice s est rectifiable; ces points peuvent passer à l'infini.*

Corollaire II. — *Si les courbes conjuguées se réduisent à des points, et que les forces* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *soient chacune une fonction de la distance du point de la trajectoire à ces points correspondants, la trajectoire s est rectifiable.*

Théorème II. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème V, si la trajectoire s est décrite d'un mouvement uniforme, il suffit que* $n-1$ *des courbes conjuguées soient rectifiables pour que la* $n^{\text{ième}}$ *le soit.*

Corollaire I. — *Si* $(n-1)$ *courbes conjuguées se réduisent à des points, la dernière courbe conjuguée sera rectifiable, lors même que toutes les forces seraient chacune une fonction de la distance du point de la trajectoire au point correspondant, pourvu que la force relative à la* $n^{\text{ième}}$ *courbe conjuguée soit constante.*

Cette conclusion n'est pas altérée dans le cas où les points passent à l'infini.

§ VI. — Des caustiques par réfraction.

92. Problème VI. — *Une courbe lumineuse projette la lumière tangentiellement à ses éléments; si chacun des rayons*

lumineux incidents est réfracté par une courbe s, de telle sorte que le sinus de l'angle qu'il fait avec la normale à cette courbe soit dans un rapport constant avec le sinus de l'angle que ce rayon, après réfraction, fait avec la même normale, l'enveloppe des rayons réfractés est appelée caustique par réfraction, *et l'on demande les propriétés de cette courbe.*

Conditions du problème. — La loi de réfraction donne, μ étant l'indice de réfraction, la relation suivante

$$(1) \qquad \cos a_1 + \mu \cos a_2 = 0.$$

Ainsi le problème est un cas particulier du précédent.

Loi des tangentes. — Elle est donnée par l'équation

$$(2) \qquad \frac{\sin^2 a_1}{r_1} + \mu \frac{\sin^2 a_2}{r_2} = \frac{\sin a_1 + \mu \sin a_2}{R} = \frac{\sin a_1}{N_1} + \mu \frac{\sin a_2}{N_2}.$$

Loi des rayons de courbure. — Si l'on élimine les D de l'équation (5) du n° 91 au moyen des relations contenues dans la troisième des équations (1) du n° 81, on obtiendra, en ayant égard à la relation (1), l'équation suivante :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3} + \mu \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} \\ & \quad = \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right)\left(\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{R}\right)\cos a_1 + \frac{\sin(a_1 - a_2)}{R^3 \cos a_2} R'. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on élimine N_2 du second membre de cette équation au moyen de la formule (2) du présent numéro, on trouve la forme suivante :

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{R}_1}{N_1^3} + \mu \frac{\mathfrak{R}_2}{N_2^3} + \left(\frac{\sin a_1}{\mu \sin a_2} + 1\right) \\ & \quad \times \left[\left(\frac{\dfrac{\sin a_1}{\mu \sin a_2} + 2}{R^2} - \frac{\dfrac{2 \sin a_1}{\mu \sin a_2} + 1}{R N_1} + \frac{\dfrac{\sin a_1}{\mu \sin a_2} - 1}{N_1^2} \right) \cos a_1 \right. \\ & \qquad \left. - \frac{\mu R'}{R^3} \sin a_2 \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui a l'avantage d'exprimer le rayon de courbure de la caustique au moyen des données de la question seulement, lesquelles sont ici les éléments de la courbe lumineuse et de la courbe réfringente. Elle conduit aussi directement à l'équation naturelle de la caustique et à sa rectification.

Rectification. — L'équation (6) du numéro précédent est

$$d(\sigma_1 - r_1) + \mu d(\sigma_2 - r_2) = 0;$$

elle donne

$$(6') \qquad \sigma_1 - r_1 + \mu(\sigma_2 - r_2) = \text{const.}$$

93. Problème VII. — *Caustique par réfraction d'une droite lumineuse projetant la lumière perpendiculairement à ses éléments.*

Ce cas revient à supposer que la courbe σ_1 se réduit à un point placé à l'infini. En ayant égard à ces hypothèses, il faut poser les deux conditions $\mathfrak{R}_1$ nul et N_1 infini; d'après cela on a

$$(1) \qquad \frac{1}{D_1} + \frac{1}{R} = 0, \quad \frac{1}{N_2} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\sin a_1}{\mu \sin a_2}\right),$$

et l'équation (5) des rayons de courbure du numéro précédent donne la formule

$$(5) \quad \mu\mathfrak{R}_2\left(1 + \frac{\sin a_1}{\mu \sin a_2}\right)^2 = -R\left(\frac{\sin a_1}{\mu \sin a_2} + 2\right)\cos a_1 + \mu R' \sin a_2.$$

Équation élémentaire. — Supposons que la courbe réfringente s soit donnée par son équation naturelle $\frac{ds}{de} = \varphi(e)$. On a les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{\pi}{2} - (e + \beta), \quad \cos a_2 = -\frac{\cos a_1}{\mu}, \\ \sin a_2 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 a_1}{\mu^2}}; \end{cases}$$

d'après cela, l'équation (5) deviendra

$$(5'). \quad \begin{cases} \mu \mathcal{R}_2 \left[1 + \dfrac{\cos(e+\beta)}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2(e+\beta)}} \right]^2 \\ \quad = - \varphi(e) \left[\dfrac{\cos(e+\beta)}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2(e+\beta)}} + 2 \right] \sin(e+\beta) \\ \quad + \varphi'(e)\sqrt{\mu^2 - \sin^2(e+\beta)}, \end{cases}$$

dans laquelle le rayon de courbure $\mathcal{R}_2$ ne dépend que de la variable e, qui fixe la position du point considéré sur la courbe directrice.

Maintenant, si l'on remarque que l'on a

$$\varepsilon_2 = a_2 + e,$$

la relation $\cos a_1 + \mu \cos a_2 = 0$ deviendra

$$(6) \qquad \sin(e+\beta) + \mu\cos(\varepsilon_2 - e) = 0;$$

de cette équation on tire e en fonction de ε_2

$$(6') \qquad e = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = - \frac{\sin\beta + \mu\cos\varepsilon_2}{\cos\beta + \mu\sin\varepsilon_2}\right).$$

De plus, si pour abréger on pose

$$D = \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu\sin(\varepsilon_2 + \beta)},$$

on aura

$$\sin(e+\beta) = -\frac{\mu}{D}\cos(\varepsilon_2 + \beta), \quad \cos(e+\beta) = \frac{\mu\sin(\varepsilon_2+\beta) + 1}{D},$$

$$\sqrt{\mu^2 - \sin^2(e+\beta)} = \pm \frac{\mu\sin(\varepsilon_2+\beta) + \mu^2}{D};$$

en ayant égard à ces valeurs, l'équation (5') donnera l'équa-

tion naturelle de la caustique, qui est

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2}}{\mu + \sin(\varepsilon_2 + \beta)} \\ &\quad = \mu\varphi(e)\frac{2\mu^2 + 3\mu\sin(\varepsilon_2 + \beta) + 1}{[1 + \mu^2 + 2\mu\sin(\varepsilon_2 + \beta)]^{\frac{5}{2}}}\cos(\varepsilon_2 + \beta) \\ &\quad + \mu^2\varphi'(e)\frac{[\mu + \sin(\varepsilon_2 + \beta)]^3}{[1 + \mu^2 + 2\mu\sin(\varepsilon_2 + \beta)]^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

pourvu que l'on remplace e sous les fonctions φ et φ' par sa valeur tirée de l'équation (6').

Si l'on suppose β nul, c'est-à-dire les rayons lumineux incidents perpendiculaires à l'axe Ox auquel la courbe réfringente s est rapportée, on a l'équation

$$(7')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_0}}{\mu + \sin\varepsilon_2} &= \mu\varphi(e)\frac{2\mu^2 + 3\mu\sin\varepsilon_2 + 1}{(\mu^2 + 2\mu\sin\varepsilon_2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\cos\varepsilon_2 \\ &\quad + \mu^2\varphi'(e)\frac{(\mu + \sin\varepsilon_2)^3}{(\mu^2 + 2\mu\sin\varepsilon_2 + 1)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

avec la relation

$$e = \text{arc tang} = \frac{-\mu\cos\varepsilon_2}{1 + \mu\sin\varepsilon_2}.$$

Si l'on suppose que la courbe réfringente est un cercle de rayon b, on trouve l'équation naturelle de la caustique

$$\frac{\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2}}{\mu + \sin\varepsilon_2} = \mu b\frac{2\mu^2 + 3\mu\sin\varepsilon_2 + 1}{(\mu^2 + 2\mu\sin\varepsilon_2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\cos\varepsilon_2.$$

Cette équation convient également à la caustique par réflexion d'une droite lumineuse, il suffit de poser $\mu = -1$, on trouve

alors

$$\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = \frac{3}{2^{\frac{5}{2}}} b \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right)}{\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4} b \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

qui est l'équation naturelle de l'épicycloïde (n° 87).

94. ***La courbe réfringente est une droite dans le problème VI.***

Conditions du problème. — Dans ce cas, on a les relations

$$(1) \qquad N_1 = D_1, \quad N_2 = D_2$$

et aussi les conditions angulaires suivantes :

$$(2) \quad \cos a_1 + \mu \cos a_2 = 0, \quad \frac{\sin a_1}{D_1} + \mu \frac{\sin a_2}{D_2} = 0, \quad \frac{D_2}{D_1} = -\mu \frac{\sin a_2}{\sin a_1},$$

si l'on prend la droite réfringente pour axe Ox de la caustique $a_2 = \varepsilon_2$.

Équation élémentaire de la courbe. — La formule des rayons vecteurs devient, après quelques réductions,

$$(3) \qquad \mu \mathcal{R}_2 = \mu^3 \frac{\sin^3 a_2}{\sin^3 a_1} \mathcal{R}_1 + \frac{\mu^2 \cos a_2 \sin a_2}{\sin^3 a_1} (\mu^2 - 1) D_1,$$

de laquelle on déduit

$$(3') \quad \mathcal{R}_2 = \frac{\mu \sin a_2}{(1 - \mu^2 \cos^2 a_2)^{\frac{3}{2}}} [\mu \mathcal{R}_1 \sin^2 a_2 + (\mu^2 - 1) D_1 \cos a_2].$$

Applications. — 1° *La courbe lumineuse est un point.*

En représentant par p une constante, on a les conditions

$$(4) \qquad \mathcal{R}_1 = 0, \quad D_1 = \frac{r}{\sin a_1} = \frac{p}{\sin^2 a_1};$$

la valeur de $\mathcal{R}_2$ précédente devient alors

$$(5) \qquad \mathcal{R}_2 = \frac{p\mu(\mu^2 - 1) \cos a_2 \sin a_2}{(1 - \mu^2 \cos^2 a_2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc la courbe est une développée de conique (n° 39).

2° *La courbe lumineuse est une parabole.*

On a les conditions (n° 29)

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{b}{\sin^3 a_1}, \quad r_1 = -\frac{b\cos a_1}{\sin^2 a_1};$$

donc l'équation (3′) donne les relations suivantes :

$$(6)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_2 &= \frac{\mu\sin a_2}{(1-\mu^2\cos^2 a_2)^{\frac{3}{2}}}\left[\mu b\frac{\sin^2 a_2}{\sin^4 a_1} + \frac{(\mu^2-1)b\mu\cos^2 a_2}{\sin^3 a_1}\right],\\ \mathfrak{R}_2 &= \frac{\mu\sin a_2}{(1-\mu^2\cos^2 a_2)^3}\,[b\mu\sin^2 a_2 + (\mu^2-1)b\mu\cos^2 a_2].\end{aligned}\right.$$

3° *La courbe lumineuse est une cycloïde.*

Les conditions de la question sont (n° 24)

$$(7) \qquad \mathfrak{R}_1 = 2m\cos a_1, \quad r = m\sin a_1, \quad \mathrm{D} = \frac{r}{\sin a_1} = m,$$

et l'équation élémentaire de la courbe est donnée par l'une des deux équations suivantes :

$$\mathfrak{R}_2 = -\frac{m\mu^2\cos a_2\sin a_2}{(1-\mu^2\cos^2 a_2)^{\frac{3}{2}}}\,[2\mu(1-\mu^2\cos^2 a_2) + (\mu^2-1)].$$

$$\mathfrak{R}_2 = -\frac{2m\mu^3\cos a_2\sin a_2}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2}} - \frac{m\mu^2(\mu^2-1)\cos a_2\sin a_2}{(1-\mu^2\cos^2 a_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

95. *La courbe réfringente est un cercle.*

Problème VIII. — *Un point lumineux* B (*fig.* 31), *placé sur la circonférence d'un cercle, projette des rayons réfractés par la circonférence de ce cercle; trouver la caustique dans le système des coordonnées* r_2, a_2.

Conditions du problème. — On a les relations angulaires

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos a_1 + \mu\cos a_2 = 0, && e + 2a_1 = \pi,\\ &\varepsilon_2 = a_2 + e, && 2a_1 + \varepsilon_2 = \pi + a_2.\end{aligned}\right.$$

Coordonnées tangentielles r_2, a_2. — On a l'équation

$$r_1 = 2\mathrm{R}\sin a_1;$$

Fig. 3[illegible].



donc l'équation (2) du n° 92 donnera la relation suivante :

$$\frac{\sin^2 a_1}{r_1} + \frac{\mu \sin^2 a_2}{r_2} = \frac{\sin a_1}{\mathrm{R}} + \frac{\mu \sin a_2}{\mathrm{R}},$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\mathrm{R}\sin a_2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \cos^2 a_2}}{2\mathrm{R}\sin^2 a_2},$$

qui donne le rayon tangentiel de la caustique.

D'une autre part, on a la relation

$$(3) \quad s = \mathrm{R}e = \mathrm{R}(\pi - 2a_1) = \mathrm{R}[\pi - 2\,\mathrm{arc}(\cos = -\mu\cos a_2)];$$

on a donc r_2 et s en fonction de a_2.

Rayon de courbure. — Il faut, dans l'équation (5′) du n° 92, poser R′ et $\mathcal{R}$ nuls, et R égal à $\frac{\mathrm{N}}{2}$; on trouve alors

$$(4) \quad \frac{\mathcal{R}_2}{\mathrm{R}} = 2\mu\frac{(\sin a_1 + \mu\sin a_2)(\sin a_1 + 5\mu\sin a_2)\sin a_1\cos a_2}{(\sin a_1 + 2\mu\sin a_2)^3},$$

dans laquelle il faudra poser

$$\sin a_1 = \sqrt{1 - \mu^2\cos^2 a_2}.$$

On vérifie cette équation dans le cas de la réflexion de la lumière; il faut faire $\mu = -1$, et l'on tombe sur une épicycloïde qui est la caustique par réflexion du point lumineux situé sur la circonférence du cercle réfléchissant.

Équation naturelle de la caustique. — Il faut remplacer dans l'équation précédente $\mathcal{R}_2$ par $\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2}$, et éliminer a_2 entre cette équation et l'équation

$$(1') \qquad \sin\left(\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{a_2}{2}\right) + \mu\cos a_2 = 0.$$

Le résultat de l'élimination donne l'équation naturelle de la caustique.

Rectification. — L'équation (6) du n° 92 donne, (σ_2), (r_2) étant les valeurs initiales de σ_2 et de r_2, la relation suivante :

$$(3) \qquad \mu(\sigma_2 - r_2) - r_1 = \mu[(\sigma_2) - (r_2)] - (r_1);$$

or r_1 et r_2 sont connus en fonction de a_2, donc l'arc σ_2 est aussi connu en fonction de cette variable.

Quadrature. — Cherchons l'aire balayée du_2 par le rayon r_2; on a

$$du_2 = \frac{r_2^2}{2}\,d\varepsilon_2,$$

et conséquemment

$$(6) \quad \begin{cases} du = \dfrac{r_2^2}{2}(da_2 + de) = \dfrac{r_2^2}{2}\left(da_2 + \dfrac{2\mu\sin a_2\,da_2}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2}}\right), \\ du = \dfrac{r_2^2\,da_2}{2}\left(\dfrac{2\mu\sin a_2 + \sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2}}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2}}\right), \end{cases}$$

d'où l'on déduit l'équation

$$\mu^2 du = \frac{R^2\mu^4\sin^4 a_2\,da_2}{(2\mu\sin a_2 + \sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2})\sqrt{1-\mu^2\cos^2 a_2}},$$

dans laquelle les variables sont séparées.

96. ***Des développantes des caustiques par réfraction.***

QUESTION. — *Étant donnée une courbe lumineuse* Σ_1 (*fig.* 32) *projetant la lumière suivant ses normales, trouver une développante* Σ_2 *de la courbe* σ_2, *enveloppe des rayons réfractés.*

Fig. 32.

Solution géométrique. — Il s'agit de construire la courbe Σ_2 sans connaître la courbe σ_2. Les rayons lumineux projetés par la courbe Σ_1, tels que AC_1, ont pour enveloppe la courbe σ_1 développée de la courbe Σ_1. Cela posé, si dans les équations (1) et (6′) du n° 92 on pose $\mu = \frac{1}{\nu}$, elles deviennent

$$(1) \qquad \cos a_2 + \nu \cos a_1 = 0,$$

$$(2) \qquad d\sigma_2 = dr_2 + \nu(dr_1 - d\sigma_1).$$

Soit $A\alpha_1$ un rayon incident; si l'on élève une perpendiculaire à ce rayon au point α_1 jusqu'à sa rencontre en D avec la tangente à la courbe s au point D, et que du point A comme centre avec un rayon égal à $\nu . A\alpha_1$ on décrive un arc de cercle, il coupera le cercle construit sur AD en deux points α_2, α_3; on aura donc la relation

$$(3) \qquad A\alpha_1 \cos\alpha_2 AD = \nu(r_1 - \sigma_1)\cos a_1;$$

or on a

$$A\alpha_1 = (r_1 - \sigma);$$

on aura donc la condition

$$(4) \qquad \cos \alpha_2 AD = \nu \cos a_2.$$

Conséquemment l'angle $\alpha_2 AD$ est égal à $a_2 - \pi$, donc $A\alpha_2$ est le prolongement du rayon réfracté.

D'une autre part, l'équation (2) donne

$$d\sigma_2 = dr_2 + d(A\alpha_2);$$

donc le point α_2 est un point d'une développante de la caustique σ_2.

Cette construction montre que, si l'indice de réfraction prend toutes les valeurs possibles, on aura une infinité de caustiques, et les points tels que α_2 des diverses développantes correspondant au rayon incident $A\alpha_1$ seront distribués sur la circonférence d'un cercle qui a AD pour diamètre; de là on tire le théorème suivant :

Théorème. — *Les développantes des diverses caustiques par réfraction d'une courbe lumineuse Σ_1 par rapport à une même courbe réfringente s obtenues d'après différents indices de réfraction sont telles, que le lieu des points tels que α_2 de ces développantes correspondant à un même point α_1 de la courbe lumineuse est une circonférence de cercle.*

Le point α_3 symétrique de α_2 par rapport à la tangente au point A à la courbe réfringente est un point d'une courbe Σ_3 qui, projetant la lumière suivant ses normales, aurait pour caustique par réflexion, par rapport à la courbe réfléchissante s, la caustique par réfraction σ_2 de la courbe Σ_1 par rapport à la même courbe s considérée comme courbe réfringente. On conclut de là le théorème suivant :

Théorème II. — *Si de l'un des points* A *de la courbe s comme centre on décrit un cercle avec un rayon égal à $\nu(r_1 - \sigma_1)$, l'enveloppe de ce cercle de rayon variable se composera de deux branches Σ_2, Σ_3; la première sera la développante de la*

caustique par réfraction de la courbe Σ_1, et la seconde une caustique secondaire par réflexion de la caustique par réfraction.

Corollaire. — *Lorsqu'on connaîtra l'une des deux branches, on obtiendra l'autre branche en cherchant l'enveloppe des cercles tangents à la première, et dont les centres se trouvent sur la courbe s.*

On déduit aussi de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on prend les symétriques par rapport à la tangente* AD *au point* A *de la courbe s et des deux branches Σ_1, Σ_2, et qu'on fasse rouler sur la courbe s sa courbe symétrique, de telle sorte qu'elle entraîne le plan qui la contient et les courbes symétriques tracées dans ce plan, la symétrique de la première branche enveloppera la seconde branche, et la symétrique de la seconde enveloppera la première.*

97. *Solution analytique.* — Cette solution a ce caractère qu'elle fait connaître la développante Σ_2 de la caustique par réfraction sans intégration, bien que la recherche des développantes des courbes soit une question de calcul intégral.

Coordonnées tangentielles. — Si l'on fait usage des coordonnées tangentielles par rapport à la courbe *s* considérée comme directrice, il s'agit de déterminer le rayon $A\alpha_2$, et l'angle $DA\alpha_2$, que nous représentons le premier par ρ et le second par β; on a donc les équations

$$(1) \qquad \rho = \nu(r_1 - \sigma_1), \quad \cos\beta = \nu\cos\alpha_1,$$

qui ne dépendent que d'une seule variable. On trouverait de la même manière les coordonnées tangentielles de la branche Σ_1.

Rayon de courbure. — Soient Γ_1, Γ_2 les rayons de courbure des courbes Σ_1, Σ_2; d'après ce que nous venons de dire, on a l'équation

$$(2) \qquad \Gamma_2 + \nu\Gamma_1 = r_2 + \nu r_1.$$

Si l'on élimine r_2 au moyen de l'équation (2) du n° 92, on

aura l'équation

$$(3)\qquad \Gamma_1 + \mu\Gamma_2 - r_1 = \frac{\mu}{\dfrac{1}{R\sin a_2}\left(\dfrac{\sin a_1}{\mu\sin a_2}+1\right) - \dfrac{1}{\mu r_1}},$$

dans laquelle Γ_2 ne dépend que d'une seule variable qui fixe la position du point.

Rectification. — Elle résulte des formules précédentes; en effet, si l'on exprime Γ_2 en fonction de ε_2 au moyen des deux relations

$$(4)\qquad \varepsilon_1 = a_1 + e, \quad \varepsilon_2 = a_2 + e,$$

et des deux relations (1) du présent numéro et (2) du n° **80**, on aura la longueur de l'arc Σ_2 au moyen de l'équation

$$(5)\qquad d\Sigma_2 = \Gamma_2 d\varepsilon_2.$$

Quadrature. — Si l'on appelle $d\mho$ l'aire infiniment petite décrite par le rayon de courbure Γ_2, on aura l'équation

$$(6)\qquad d\mho = \frac{1}{2}\Gamma_2^2 d\varepsilon_2.$$

Coordonnées par rapport à la courbe Σ_1. — Si l'on prend pour courbe directrice la courbe lumineuse Σ_1, ce qui, dans plusieurs cas, offre un avantage réel, les coordonnées tangentielles de la développante Σ_2 par rapport à cette directrice sont la longueur $\alpha_1\alpha_2$ et l'angle que cette droite fait avec la tangente en α_1 à la courbe Σ_1. Soient ρ_1 et θ ces coordonnées, on a, en projetant le périmètre du triangle $\alpha_1\alpha_2 A$ sur la ligne $\alpha_1\alpha_2$, la relation

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1 A \sin a_2 + \alpha_2 A \sin a_1,$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \rho_1 = (r_1 - \sigma_1)\left(\nu \sin a_1 + \sqrt{1 - \nu^2\cos^2 a_1}\right),$$

que l'on peut écrire sous la formule suivante :

$$(7')\qquad \rho_1 = (r_1 - \sigma_1)\left[\frac{\nu r_1 d\varepsilon_1}{ds} + \sqrt{1 - \nu^2\frac{d(r_1-\sigma_1)^2}{ds^2}}\right];$$

d'autre part, on a $\alpha_2\alpha_1 D = a_2 - \pi$, d'où l'on tire la condition

$$(2) \qquad \cos\theta = \nu \cos a_1 = \nu \frac{d(r_1 - \sigma_1)}{ds};$$

donc les deux variables ρ_1 et θ sont des fonctions d'une seule variable.

Dans le cas où la courbe Σ_1 se réduit à un point, et en appelant θ_1 l'angle que $\alpha_1\alpha_2$ fait avec la direction fixe αx et ε_1 l'angle que $A\alpha_1$ fait avec αx, on a la relation

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 = a_2 + \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Les deux équations (7′) et (8) sont donc remplacées par les deux suivantes :

$$\rho_1 = \nu \frac{r_1^2 d\varepsilon_1}{ds} + r_1 \sqrt{1 - \nu^2 \frac{dr_1^2}{ds^2}},$$

$$\cos\theta_1 = -\nu \frac{dr_1}{ds} \sin\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_1 \sqrt{1 - \nu^2 \frac{dr^2}{ds^2}},$$

qui font connaître les deux coordonnées polaires ρ_1 et θ_1 en fonction d'une seule variable ε_1.

Application. — La courbe réfringente s est un cercle de rayon R, et la courbe lumineuse Σ_1 un point pris sur la circonférence de ce cercle. On a les équations

$$r_1 = 2R\cos a_1, \quad a_1 = \varepsilon_1,$$

$$\rho_1 = r_1\left(\sqrt{1 - \nu^2\cos^2 a_1} + \nu\sqrt{1 - \cos^2 a_1}\right),$$

$$\sin\theta_1 = -\nu\cos^2 a_1 + \sqrt{1 + \cos^2 a_1}\sqrt{1 - \nu^2\cos^2 a_1},$$

desquelles on déduit l'équation de la courbe Σ_2 en coordonnées polaires

$$\rho_1^2 = R^2(1 + \nu^2 - 2\nu\sin\theta_1).$$

§ VII. — Des courbes conjuguées d'après diverses lois.

98. Problème IX. — *n courbes sont conjuguées suivant leurs tangentes concourant en un point d'une directrice par*

la relation

$$\sum \frac{A \sin a}{r} = 0, \quad \sum \frac{A}{N} = 0, \tag{1}$$

dans lesquelles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont des constantes; trouver les lois qui régissent ces courbes.*

Loi des tangentes. — L'équation (1) fait connaître elle-même la loi d'après laquelle sont liées les projections des rayons tangentiels sur la normale à la courbe. D'une autre part, on a l'équation :

$$\frac{\Sigma A}{R} + \sum \frac{A}{D} = 0, \tag{2}$$

de laquelle on déduit la relation suivante, dans laquelle k est la constante introduite par l'intégration :

$$e \Sigma \dot{A} + \Sigma A a = k. \tag{3}$$

Si la directrice est donnée ainsi que le faisceau de $(n-1)$ courbes conjuguées, les deux équations feront connaître les deux coordonnées a_n et r_n de la $n^{ième}$ courbe en un point quelconque de la directrice.

Loi des rayons de courbure. — Si nous prenons la dérivée de l'équation (1), nous aurons la relation

$$\sum \frac{A \cos a}{r D} - \sum \frac{A \sin a}{r^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D} \right) \frac{dr}{d\varepsilon} = 0; \tag{4}$$

or on a (n° 63)

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = \mathfrak{R} - r \cot a. \tag{n}$$

Donc, si l'on remplace les $\frac{dr}{d\varepsilon}$ dans l'équation (4), elle deviendra

$$\sum \frac{A \cos a}{r D} = \sum \frac{A \sin a}{r^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D} \right) (\mathfrak{R} - r \cot a), \tag{4'}$$

ou bien

$$\sum \frac{A \cos a}{rD} = \sum \frac{A \sin^2 a}{r^2} (\mathfrak{R} - r \cot a),$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(4'') \qquad \sum \frac{A}{N^2 \sin a} \left[\mathfrak{R} - \left(N + \frac{N^2}{D} \right) \cos a \right] = 0.$$

Cette équation fait connaître d'une manière facile le rayon de courbure de la $n^{ième}$ courbe conjuguée.

Remarque I. — Si le second membre de l'équation donnée (1) était une constante c, on aurait à la place de l'équation (3) la suivante :

$$(3') \qquad e \Sigma A + \Sigma A a = cs + k.$$

Or on a

$$\frac{ds}{de} = R, \quad s = \int_0^e R\, de;$$

en portant dans l'équation précédente, on aurait

$$(3'') \qquad e \Sigma A + \Sigma A a = c \int_0^e R\, de + k;$$

on a donc une relation entre e et $a, a_1, \ldots, a_n$.

La loi des rayons de courbure est la même que ci-dessus.

Remarque II. — Si l'équation (1) est

$$\sum \frac{\sin a}{r} = \frac{n}{C}, \quad \text{ou bien} \quad \sum \frac{1}{N} = \frac{n}{C},$$

ce qui revient à dire que C moyenne harmonique des normales est constante, la normale de la $n^{ième}$ courbe N_n se construit en vertu de cette propriété.

On a de plus

$$ne + \Sigma a = k.$$

Cette relation fait connaître la direction de r_n; et si de l'extré-

mité de N_n on abaisse une perpendiculaire sur la direction de r_n, on aura l'extrémité du rayon tangentiel r_n.

La formule des rayons de courbure $(4'')$ donne la loi qui régit ces rayons, pourvu que les coefficients tels que A soient remplacés par l'unité.

99. Problème X. — *n courbes sont conjuguées suivant leurs tangentes concourant en un point d'une directrice par la relation*

$$(1) \qquad \Sigma A \varphi(\sigma - r) = c,$$

dans laquelle φ est une fonction quelconque et c une constante; trouver les lois qui régissent ces courbes.

Loi des tangentes. — Si l'on différentie la relation précédente, on aura

$$(2) \qquad \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\cos a = 0;$$

qui fait connaître la loi d'après laquelle les angles $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont conjugués.

D'une autre part, si l'on différentie cette dernière équation, on aura

$$(3) \qquad \Sigma A \varphi''(\sigma - r)\cos^2 a - \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{\sin a}{D} = 0;$$

cette équation donnera $\frac{1}{D_n}$ et, par suite, $\frac{1}{r_n}$; on connaît donc la loi d'après laquelle les rayons tangentiels sont conjugués.

Loi des rayons de courbure. — Par une troisième différentiation, on trouve

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma A \varphi'''(\sigma - r)\cos^3 a - 3\Sigma A \varphi''(\sigma - r)\frac{\cos a \sin a}{D} \\ &\quad - \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{\cos a}{D^2} + \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{\sin a\, D'}{D^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous avons trouvé (n° 81)

$$-\frac{\cos a}{D r} + \frac{\sin^2 a}{r^3}\frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{R'}{R^3} + \frac{D'}{D^3};$$

or le dernier terme de l'équation (5), en vertu de la relation précédente, devient

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{D'}{D^3}\sin a \\ &\quad = \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{\sin^3 a}{r^3}\frac{dr}{d\varepsilon} - \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{\sin a \cos a}{rD} \\ &\quad\quad - \Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{R'}{R^3}\sin a, \end{aligned} \right.$$

relation que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(6')\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma A \varphi'(\sigma - r)\frac{D'}{D^3}\sin a \\ &\quad = \sum \frac{A}{N^3}\varphi'(\sigma - r)\left(\mathfrak{R}' - N\cos a - \frac{N^2}{D}\cos a - \frac{R'}{R^3}N^3\sin a\right). \end{aligned} \right.$$

Si dans l'équation (5) on remplace le dernier terme par sa valeur tirée de cette dernière, on obtient la formule

$$(5')\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma A \varphi'''(\sigma - r)\cos^3 a - 3\Sigma A \varphi''(\sigma - r)\frac{\cos a \sin a}{D} \\ &\quad + \sum \frac{A}{N^3}\varphi'(\sigma - r)\left[\mathfrak{R} - \left(N + \frac{N^2}{D} + \frac{N^3}{D^2}\right)\cos a \right. \\ &\quad\quad \left. - \frac{R'N^3}{R^3}\sin a\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette formule est tout à fait générale, et renferme toutes les précédentes analogues trouvées dans les différents problèmes que nous avons résolus.

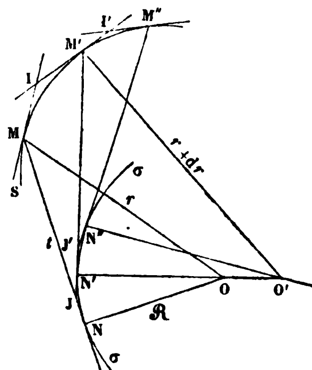
100. **Problème XI.** — *Les longueurs t_1, t_2, ..., t_n des tangentes menées d'un point d'une courbe s à n courbes données σ_1, σ_2, σ_3, ..., σ_n sont conjuguées d'après la loi*

$$(1)\qquad f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) = c;$$

trouver la loi d'après laquelle les inclinaisons de ces tangentes sur la courbe s sont conjuguées ainsi que la loi qui lie les rayons de courbure.

Variations première et seconde d'une tangente t par rapport à ds. — Soient (*fig.* 32 *bis*) MM', M'M'' deux éléments con

Fig. 32 *bis*.



sécutifs de la courbe s; NN', N'N'' deux éléments correspondants de la courbe σ; JM, J'M' les positions consécutives de la tangente t; NO le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ de la courbe σ, et r la ligne qui joint le point M avec l'extrémité de $\mathfrak{R}$, on a les deux relations

$$(2)\qquad dt = ds\cos\widehat{t\,ds} - d\sigma,\quad t\,d\varepsilon = ds\sin\widehat{t\,ds};\qquad (n)$$

la première donne, en ayant égard à la seconde et à l'équation naturelle de la courbe σ

$$(3)\qquad \frac{dt}{ds} = \frac{t\cos\widehat{t\,ds} - \mathfrak{R}\sin\widehat{t\,ds}}{t} = \frac{r}{t}\cos\widehat{r\,ds}.\qquad (n)$$

Cette dernière relation provient de ce que, dans le triangle dont les côtés sont t, r, $\mathfrak{R}$, la projection du côté r sur ds est égale à la somme des projections des deux autres côtés sur cet élément.

Convenons que, lorsqu'une droite t prend une position infiniment voisine, nous la représentons par la même lettre accentuée t'; il est évident que la variation d'un angle $\widehat{tr}$ est

égale à la somme des déviations des côtés; d'après cela, on aura les équations, en ayant égard aux signes,

$$(4)\quad d(r, ds) = (ds, ds') - (r, r'), \quad d(t, r) = (t, t') - (r, r'). \quad (n)$$

Or, si l'on projette le périmètre de la figure MIM'O'O d'abord sur r et ensuite sur une perpendiculaire à r, on obtient les deux équations

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} dr &= ds \cos \widehat{r\,ds} + d\mathfrak{R} \sin \widehat{rt}, \\ r \sin \widehat{rr'} &= ds \sin(r, ds) - d\mathfrak{R} \cos(r, t). \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Or la seconde de ces équations peut s'écrire sous la forme

$$-\frac{(r, r')}{ds} = \frac{\mathfrak{R}'}{tr} \sin(t, ds) \cos(t, r) - \frac{\sin(t, ds)}{r}. \quad (n)$$

D'après cela, la première des équations (4) donne la formule

$$(6)\quad \frac{d(r, ds)}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\sin(r, ds)}{r} + \frac{\mathfrak{R}'}{tr} \sin(t, ds) \cos(t, r). \quad (n)$$

Ces formules étant établies, si l'on prend la variation par rapport à ds de la seconde des équations (3), et qu'on y remplace les variations de l'angle (r, ds) de dr et de dt par leurs valeurs tirées des équations (6), (5) et (3), et que de plus on remarque que l'on a les deux relations

$$(7)\quad \frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \frac{\mathfrak{R}' \sin(t, ds)}{t}, \quad (t, ds) = (r, ds) - (t, r), \quad (n)$$

on tombera sur la relation simple

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) = &-\frac{1}{\mathrm{R}} \frac{\sin(r, ds)}{\cos(r, t)} + \frac{1}{t}\left[\frac{\cos^2(r, t) - \cos^2(r, ds)}{\cos^2(r, t)}\right] \\ &- \frac{\mathfrak{R}'}{r^2} \frac{\sin^2(t, ds)}{\cos^2(t, r)}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Loi des inclinaisons des tangentes. — Différentions l'équa-

tion (1) par rapport à ds, et ayons égard à la seconde des équations (3) qui est le type de n équations semblables; nous trouverons la formule

$$\sum \frac{df}{dt} \frac{\cos(r, ds)}{\cos(r, t)}, \tag{9}$$

qui donne la loi des inclinaisons.

Loi des rayons de courbure. — Si nous prenons la différentielle seconde de l'équation (1) par rapport à ds, nous trouvons

$$\sum \frac{d^2 f}{dt^2}\left(\frac{dt^2}{ds^2}\right) + \sum \frac{df}{dt} \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) = 0.$$

Or si l'on remplace dans cette équation les dérivées premières et secondes des t par rapport à ds tirées des équations (3) et (8), et que l'on pose, pour abréger

$$\frac{\mathfrak{R}'}{r^2} = \frac{1}{\tau},$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$\frac{1}{R}\sum \frac{df}{dt} \frac{\sin(r, ds)}{\cos(r, t)} = \sum \frac{df}{dt}\left\{\left[1 - \frac{\cos^2(r, ds)}{\cos^2(r, t)}\right]\frac{1}{t} - \frac{\sin^2(t, ds)}{\cos^2(t, r)}\frac{1}{\tau}\right\}$$
$$+ \sum \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{\cos^2(r, ds)}{\cos^2(r, t)}.$$

Cette équation montre que la courbure $\frac{1}{R}$ de la courbe directrice s'obtient au moyen de la division harmonique lorsque les n courbes (σ) sont connues.



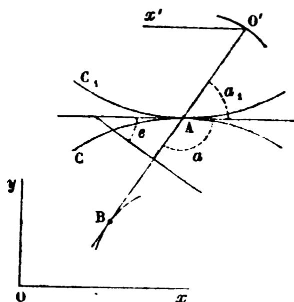
CHAPITRE II.

DES ROULETTES.

La théorie des *roulettes* s'établit d'une manière aussi facile que directe lorsqu'on fait usage des systèmes de coordonnées établis dans les Chapitres III et IV. On parvient ainsi à obtenir les propriétés connues de ces courbes, et à trouver quelques propriétés nouvelles non moins intéressantes. L'ensemble de ces recherches forment la matière du présent Chapitre.

101. Problème I. — *Le mouvement d'un plan* (*fig.* 33) *est*

Fig. 33.



déterminé par la condition qu'une courbe C_1 *située dans ce plan roule sans glissement sur une courbe plane donnée* C; *trouver la courbe engendrée par un point* O', *du plan mobile.*

Le point décrivant O', engendre *la roulette*, la courbe C fixe est appelée *base de la roulette.*

Équations différentielles. — Si l'on suppose la courbe C_1 rapportée à un système de coordonnées polaires r_1, θ, O' étant le pôle, et l'axe fixe dans le plan mobile étant une droite $O'x'$, en appelant a_1 l'angle du rayon r_1 (O'A) et de la tangente en A,

ds_1 l'élément d'arc, et R_1 le rayon de courbure, on aura les relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{r_1\,d\theta}{ds_1} = \sin a_1, \quad \frac{dr_1}{ds_1} = \cos a_1, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{\sin a_1}{r_1} + \frac{da_1}{ds_1}.$$

D'une autre part, la développée B de la roulette étant rapportée à ses coordonnées tangentielles r, a, par rapport à la ligne C comme directrice, si l'on appelle $d\sigma_1$ l'élément d'arc de cette développée, $d\varepsilon$ l'angle de contingence, ds l'élément d'arc, R le rayon de courbure de la courbe C, on aura (40) les équations

$$(2) \qquad \frac{r\,d\varepsilon}{ds} = \sin a, \quad \frac{d(r+\sigma_1)}{ds} = \cos a, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin a}{r} + \frac{da}{ds},$$

auxquelles il faut joindre les relations qui ont lieu au point de contact

$$(3) \qquad ds = ds_1, \quad a + a_1 = \pi.$$

Tangente à la roulette. — Si on ajoute les équations qui donnent $\cos a$, $\cos a_1$, on trouve la condition

$$(4) \qquad d(r + r_1 + \sigma_1) = 0.$$

Donc, si l'on appelle $\mathcal{R}_1$ le rayon de courbure de la roulette, on aura la relation

$$(5) \qquad \mathcal{R}_1 = r + r_1.$$

Cette équation montre que, si du point de contact A des deux courbes C, C_1 on mène la droite AO′, elle sera normale à la roulette, et, par conséquent, un point O′ quelconque du plan mobile décrit un arc de cercle infiniment petit autour du point A comme centre. Ce point A, autour duquel s'effectue la rotation de la figure pendant un temps infiniment petit, porte le nom de *centre instantané de rotation.*

On déduit le théorème suivant, qui a une grande importance :

THÉORÈME I. — *Le point de contact* A *des deux courbes* C,

C_1 *est le centre instantané de rotation de la figure mobile, et cette rotation est en ce point égale à la somme ou à la différence des angles de contingence des deux courbes suivant qu'elles ont leurs convexités contraires ou de même sens.*

Rayon de courbure. — En ajoutant les équations qui donnent $\sin a$, $\sin a_1$ dans les groupes (1) et (2), on obtiendra la relation

$$(6) \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\sin a = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Cette équation fait connaître r_1, et par conséquent le rayon de courbure $\mathcal{R}_1$ est connu par suite de l'équation (5).

Coordonnées rectangles. — Résolvons maintenant le problème dans le système des coordonnées cartésiennes.

Soient les deux courbes C et C_1 rapportées l'une et l'autre à des axes rectangulaires, les premiers fixes et les seconds mobiles avec la courbe C_1, invariablement liés avec elle, et ayant leur origine au point O'. Soient x, y, les coordonnées du point de contact de la première par rapport aux axes fixes, et x_1, y_1 les coordonnées du même point en tant qu'appartenant à la seconde courbe par rapport aux axes mobiles. Si l'on appelle α, β les coordonnées du point décrivant par rapport aux axes fixes, et r_1 la distance du point de contact au point O', on aura, pour chacun des deux axes fixes, une équation semblable à la suivante, qui se rapporte à l'axe des x :

$$(7) \quad \alpha = x + r_1[\cos(r_1, ds)\cos(ds, x) + \cos(R_1, r_1)\cos(R_1, x)].$$

Si l'on appelle θ_1 l'angle que r_1 fait avec l'axe $O'x'$, l'équation précédente devient

$$(7') \qquad \alpha = x + r_1\left(\frac{dr_1}{ds_1}\frac{dx}{ds} + \frac{r_1\,d\theta_1}{ds_1}\frac{dy}{ds}\right);$$

or, par rapport aux axes mobiles, r_1, $\frac{dr_1}{ds_1}$, $\frac{r_1\,d\theta_1}{ds_1}$ sont des fonctions de la variable qui fixe la position du point, variable que l'on peut supposer être s_1 ; de même, par rapport aux axes fixes, x, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sont des fonctions d'une seule variable que l'on

peut supposer être s; mais, comme on a cette condition que ds et ds_1 sont égaux, il en résulte que les deux arcs s et s_1 ne diffèrent que par une constante. Donc les deux seconds membres des deux équations contenues dans le type (7′) sont fonctions d'une seule variable. Ce sont donc les équations de la roulette par rapport aux axes fixes. Nous ferons quelquefois usage de cette méthode.

102. *Théorèmes relatifs aux courbures.* — On déduit de l'équation (6) le théorème suivant :

Théorème II. — *Le conjugué harmonique* D *du point de contact* A *par rapport au centre de courbure de la courbe* C, *et au symétrique du centre de courbure de la courbe* C_1 *relativement au point* A, *le conjugué harmonique du point* A *par rapport au centre de courbure de la roulette et au symétrique du point décrivant relativement au même point* A, *sont situés sur une circonférence de cercle tangente aux courbes* C, C_1 *au point* A.

Corollaire. — Si l'on représente par $d\omega$ la rotation élémentaire de la figure, on a

$$(7)\qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1}.$$

Construction du rayon de courbure de la roulette. — Déterminez le point conjugué harmonique D, *projetez ce point sur la direction de* r *en* d, *déterminez le quatrième harmonique des points* d, A *et du symétrique du point décrivant relativement au point* A, *ce quatrième harmonique est le centre de courbure de la roulette.*

Le cercle tangent au point de contact A des deux courbes C, C_1, et passant par les deux points D et d, est indépendant de la position du point décrivant O; on déduit :

Théorème III. — *Si l'on considère les différentes roulettes engendrées par les différents points du plan mobile, et qu'on prenne le conjugué harmonique du point de contact* A *des deux courbes* C *et* C_1 *par rapport au symétrique d'un quelconque des points décrivants relativement au point* A, *et le*

centre de courbure de la roulette correspondante, ce conjugué harmonique se trouve situé sur la circonférence d'un même cercle, ayant AD *pour diamètre, quel que soit le point décrivant.*

Théorème IV. — *Si l'on considère les différentes roulettes engendrées par les points du plan mobile, situés sur une circonférence de cercle quelconque, tangente aux deux courbes* C, C_1 *en leur point de contact, les centres de courbure correspondants des roulettes se trouveront situés sur la circonférence d'un autre cercle tangent aux courbes* C, C_1 *en leur point de contact.*

Théorème V. — *Si l'on considère les différentes roulettes engendrées par les points du plan mobile situés à l'infini, les centres de courbure de ces roulettes se trouvent distribués sur un cercle tangent aux courbes* C, C_1 *en leur point de contact* A, *et ayant pour diamètre la moitié de* AD, *cercle* $\left(\frac{AD}{2}\right)$.

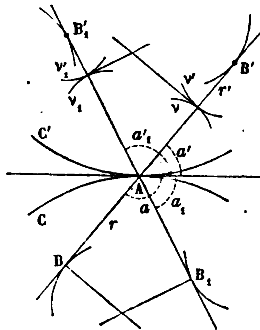
Réciproquement, *si l'on considère les différentes roulettes engendrées par différents points du plan mobile, situés sur la circonférence du cercle symétrique du cercle* $\left(\frac{AD}{2}\right)$ *par rapport à la tangente au point* A *des courbes* C, C_1, *les centres de courbure correspondant à ces différentes roulettes seront situés à l'infini; ce qui revient à dire que les roulettes ont aux points correspondants une inflexion.*

Théorème VI. — *Si l'on considère les différentes roulettes engendrées par des points du plan mobile situés en ligne droite* MN, *les centres de courbure correspondants de ces roulettes seront situés sur la circonférence d'une conique déterminée par ces cinq conditions qu'elle est tangente aux deux courbes* C, C_1 *en leur point de contact, et qu'elle passe par les intersections du cercle* $\left(\frac{AD}{2}\right)$ *avec la parallèle à la ligne* MN *menée par le point de contact, et par les intersections du cercle* (AD) *avec la symétrique de la droite* MN *par rapport au point* A; *ces deux cercles étant tangents aux courbes* C, C_1 *en leur point de contact.*

Remarque. — Le cercle dont le diamètre est AD serait constant de grandeur, si les deux courbes C, C_1 étaient telles que la somme de leurs courbures $\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)$ restât constante; cette circonstance se présente lorsque les deux courbes C, C_1 sont deux cercles; mais, quelle que soit l'une des deux courbes C, C_1, on peut toujours déterminer l'autre de telle sorte que la somme de leur courbure reste invariable. Si cette condition est remplie, et que l'on considère deux points du plan mobile tels que le premier, dans une position de ce plan, occupe, par rapport à la tangente et à la normale au point de contact des deux courbes C et C_1, la même situation qu'occupe le second point, dans une seconde position du plan mobile, par rapport à la tangente et à la normale au nouveau point de contact des courbes C et C′, le rayon de courbure de la roulette engendrée par le premier point sera, dans la première position de la figure, égal en grandeur et situation au rayon de courbure de la roulette engendrée par le second point, relatif à la seconde position de la figure.

103. Problème II. — *Le mouvement d'un plan est déterminé par la condition qu'une courbe* C′ (*fig.* 33 *bis*), *située*

Fig. 33 *bis*.



dans ce plan, roule sans glissement sur une courbe plane C; *trouver l'enveloppe* v *d'une courbe* v′ *située dans le plan mobile.*

Équations différentielles. — D'après les principes établis au n° 50, si du point de contact A de deux courbes C, C′ on abaisse une normale sur la courbe ν', le pied E de cette normale appartient à la courbe ν, enveloppe de la courbe ν'. Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ les rayons de courbure de ν et ν' en leur point de contact; si l'on rapporte la courbe développée B de la courbe ν à ses coordonnées tangentielles r, a par rapport à la courbe C comme directrice, et la courbe B′ développée de ν' à ses coordonnées tangentielles r', a' par rapport à la courbe C′ comme directrice, $d\sigma$, $d\varepsilon$, $d\sigma'$, $d\varepsilon'$ étant les arcs et les angles de contingence de ces deux développées, les notations du n° 101 relatives aux courbes C, C′ étant conservées, on aura les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{r\,d\varepsilon}{ds} = \sin a, & \dfrac{d(r+\sigma)}{ds} = \cos a, & \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin a}{r} + \dfrac{da}{ds}; \\ \dfrac{r'\,d\varepsilon'}{ds'} = \sin a', & \dfrac{d(r'+\sigma')}{ds'} = \cos a', & \dfrac{1}{R'} = \dfrac{\sin a'}{r'} + \dfrac{da'}{ds'}, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les conditions

$$(2)\qquad ds = ds', \quad a + a' = \pi.$$

Tangente à l'enveloppe ν. — Si l'on ajoute les équations qui donnent $\cos a$, $\cos a'$, on trouve que $d(r + r' + \sigma + \sigma')$ est nulle, et, par suite

$$\mathcal{R} + \mathcal{R}' = r + r'.$$

Cette équation montre que, si du point de contact A des deux courbes C, C′ on abaisse une normale n sur la courbe ν', le pied de cette normale appartient à la courbe ν enveloppe de ν', ce qui est conforme au principe établi n° 50. On a donc un point de l'enveloppe ν et la normale en ce point.

Rayon de courbure de l'enveloppe. — En ajoutant les équations qui donnent $\sin a$, $\sin a'$, après les avoir divisées, la première par r, la seconde par r', on trouve

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\sin a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Cette équation et la précédente font connaître le rayon de courbure de l'enveloppe de ν'.

Théorème I. — *Si l'on prend deux conjugués harmoniques* D, *d du point de contact* A, *le premier par rapport au centre de courbure de la courbe* C *et au symétrique du centre de courbure de la courbe* C', *et le second par rapport au centre de courbure de la courbe* ν *et au symétrique du centre de courbure de la courbe* ν', *ces deux points* D, *d sont situés sur une circonférence tangente aux deux courbes* C, C' *en leur point de contact.*

On déduit la construction du centre de courbure de l'enveloppe ν de la courbe ν', comme on l'a donnée au numéro précédent.

Ce cercle tangent au point A est indépendant de la position de la courbe ν et de la nature de cette courbe. On déduit :

Théorème II. — *Si l'on considère les différentes enveloppes correspondant à différentes courbes* ν', $\nu'_1, \ldots$ *situées dans le plan mobile, les conjugués harmoniques du point* A *de contact des deux courbes* C, C' *par rapport aux symétriques, relativement au point* A *des centres de courbure des courbes* ν', $\nu'_1, \ldots$ *et aux centres de courbure des courbes enveloppes correspondantes, se trouvent distribués sur la circonférence d'un cercle d'un diamètre constant pour chaque point* A, *et tangent en ce point aux deux courbes* C, C'.

Théorème III. — *Si l'on considère les différentes courbes* ν', ν'_1, $\nu'_2, \ldots$, *situées dans le plan mobile, telles que leurs centres de courbure correspondant au point* A *de contact des courbes* C, C' *soient situés sur un cercle tangent au point* A *aux courbes* C, C' *les centres de courbure des enveloppes correspondantes seront situés aussi sur la circonférence d'un cercle tangent aux courbes* C *et* C' *en leur point de contact* A.

Théorème IV. — *Si l'on considère les différentes courbes* ν', ν'_1, $\nu'_2, \ldots$, ν'_n, *situées dans le plan mobile, telles que les centres de courbure correspondant au point* A *soient situés sur le*

symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$, *les centres de courbure des enveloppes correspondantes seront situés à l'infini.*

Théorème V. — *Deux courbes parallèles situées dans le plan mobile envelopperont deux courbes parallèles situées dans le plan fixe.*

De là on déduit :

1° Deux droites parallèles situées dans le plan mobile enveloppent deux développantes d'une même courbe;

2° Deux cercles concentriques, dont l'un peut se réduire à un point, enveloppent deux développantes d'une même courbe;

3° Tout cercle qui a son centre sur la symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ enveloppe une courbe qui a une inflexion au point de contact.

104. *Coordonnées rectangles.* — Résolvons aussi, dans le système des coordonnées cartésiennes, le problème posé au commencement du présent numéro.

Soient les deux courbes C' et ν' rapportées au système tangentiel par rapport à la développée de la courbe ν'; soit $\mathcal{R}'$ le rayon de courbure de la courbe ν'; les variables r' et $\mathcal{R}'$ sont des fonctions de ε'. Soient, comme au numéro précédent, la courbe C rapportée à des axes fixes Ox, Oy; x et y les coordonnées du point de contact des courbes C et C' par rapport à ces axes, ces coordonnées sont des fonctions d'une seule variable t. Si l'on désigne par α et β les coordonnées par rapport aux mêmes axes du point de contact E des courbes ν et ν', on a, par rapport à chacun des axes Ox, Oy, une équation semblable à la suivante :

$$\alpha = x + (r' - \mathcal{R}')\cos(\widehat{r'\,ds} - \widehat{x\,ds}). \tag{4}$$

Or, si l'on développe le cosinus et que l'on ait égard aux équations (1) du n° 103, on obtient la relation

$$\alpha = x + (r' - \mathcal{R}')\left[\frac{dx}{ds}\,\frac{d(r'+\sigma')}{ds'} + \frac{dy}{ds}\,\frac{r'\,d\varepsilon'}{ds'}\right]. \tag{4'}$$

Comme les deux éléments ds et ds' sont égaux, il en résulte que les deux variables indépendantes, la première t relative à la courbe fixe, et la seconde t' relative à la courbe mobile, sont fonctions l'une de l'autre.

Conséquemment, les seconds membres des deux équations contenues dans le type ($4'$) sont fonctions d'une seule variable : ce sont donc les équations de la roulette par rapport aux axes fixes.

Il serait possible de déduire par le calcul des équations ($4'$) toute la théorie des roulettes; mais cette analyse serait moins simple que celle de notre texte.

Quadrature de l'enveloppe. — Supposons que la courbe C (*fig.* 34) soit une droite, et soient C′, ν' deux courbes fer-

Fig. 34.

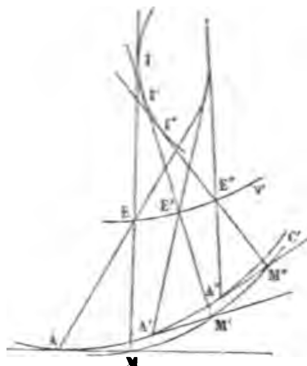
mées, la seconde intérieure à la première; du la différentielle de l'aire comprise entre ces deux courbes, et Ω l'aire de l'enveloppe, lorsque C′ a fait une révolution complète sur la droite C; cette aire est celle qui a été balayée par le rayon qui joint le centre instantané A avec le point de contact E correspondant des deux courbes ν, ν'. La différentielle de cette aire se compose d'un trapèze, qui est la différentielle du, et d'un triangle provenant de la rotation de' de la ligne AE autour du point A, et dont l'aire a pour expression $\frac{1}{2}\,\overline{AE}^2\,de'$; on

a donc la relation, Σ indiquant une somme,

$$(5) \qquad \Omega = u + \frac{1}{2}\Sigma\overline{AE}^2 de'.$$

Supposons (*fig.* 35) maintenant que de chaque point de contact E des deux courbes ν, ν′ on abaisse une perpendicu-

Fig. 35.



laire EM sur la tangente à la courbe C′ menée par le centre instantané de rotation; le lieu des pieds de cette perpendiculaire est appelé *podaire de la courbe* C′ *par rapport à la courbe* ν′; cette courbe est indépendante de la rotation de la figure, puisque les points A et E correspondants se trouvent sur la tangente à la développée de la courbe ν′: la ligne EM balaye une aire V qui est l'aire de la podaire; elle a une enveloppe II′I″. Si l'on ajoute à l'aire balayée par la tangente AM l'aire u, on trouve aussi l'aire V de la podaire; on a donc l'équation

$$2V = \frac{1}{2}\Sigma\left(\overline{IM}^2 - \overline{IE}^2\right) de' + \frac{1}{2}\Sigma\overline{AM}^2 de' + u.$$

Or, si l'on remarque que l'on a

$$IM = EM + EI,$$

l'expression précédente devient

$$(6)\qquad 2V = \frac{1}{2}\Sigma\overline{AE}^2 de' + u + \Sigma EM \times EI\, de'.$$

On a donc, en retranchant l'équation (5) de l'équation (6), la relation

$$2V - \Omega = \Sigma EM \times EI\, de'.$$

Si l'on porte sur la tangente à l'enveloppe II′I″, à partir du point de contact I, une moyenne proportionnelle aux segments EM, MI déterminés par la courbe ν' et la podaire, cette longueur balaye une aire W, et l'équation précédente devient

$$(6')\qquad 2V = \Omega + 2W.$$

Cette équation montre que l'aire V est moyenne arithmétique entre les deux aires Ω et 2W.

105. Problème III. — *Le mouvement d'un plan est déterminé par la condition qu'une courbe* C_1, *située dans ce plan, roule sans glissement sur une courbe plane donnée* C; *trouver le lieu des positions des centres de courbure de la courbe* C_1 *correspondant aux divers points de contact des courbes* C, C_1.

Coordonnées du lieu. — Soient $d\Sigma$ l'élément d'arc de la courbe décrite; α l'angle que cet élément fait avec le rayon de courbure R_1 de la courbe C_1, si l'on rapporte la courbe Σ à la développée de la courbe C comme courbe des pôles, en employant le système de coordonnées exposé dans le Chapitre IV, et qu'on représente par σ, σ_1 les arcs des développées des courbes C, C_1, par $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$ les angles de contingence de ces développées, on aura les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (R + R_1)d\varepsilon = \sin\alpha\, d\Sigma, \quad d\sigma + d(R + R_1) = \cos\alpha\, d\Sigma, \\ R\, d\varepsilon = R_1\, d\varepsilon_1, \end{cases}$$

avec les relations

$$(2)\qquad d\sigma = -dR, \quad d\sigma_1 = dR_1.$$

On déduit facilement de ces équations la relation suivante :

$$(3)\qquad (R - R_1)\,\mathrm{tang}\,\alpha = R\frac{R'_1}{R_1},$$

qui fait connaître la direction de la tangente à la courbe Σ.

Rayon de courbure du lieu. — Si l'on fait usage de la formule (4) du n° 103, laquelle est

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 - \frac{d(r-z)}{ds}\,\frac{d(2r-z)}{ds} - r\frac{d^2(r-z)}{ds^2}}{\left\{r^2 + \left[\frac{d(r-z)}{ds}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il faut remplacer

$$r \text{ par } R - R_1,\qquad \frac{d(r-z)}{ds} \text{ par } \frac{RR'_1}{R_1},$$

$$\frac{d(2r-z)}{ds} \text{ par } \frac{d(2R-R_1)}{ds} \text{ par } \frac{2RR'_1}{R_1} - R'_1,$$

$$\frac{d^2(r-z)}{ds^2} \text{ par } \frac{RR''_1}{R_1} - \frac{R^2R''_1}{R_1^2} - \frac{R^2R'^2_1}{R_1^3},$$

on obtient l'équation

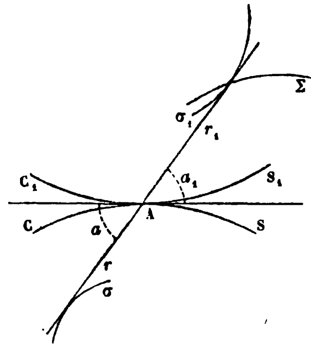
$$(5)\qquad \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{(R - R_1)^2 - RR'_1 - \frac{R^2}{R_1^2}\left[3R_1'^2 - (R - R_1)R''_1\right] - \frac{R^2}{R_1^2}R'^2_1}{\left[(R - R_1)^2 + \frac{R^2}{R_1^2}R'^2_1\right]^{\frac{3}{2}}},$$

qui fait connaître le rayon de courbure du lieu en fonction des rayons de courbure des courbes C, C_1 et de leurs développées première et seconde.

106. Problème IV. — *Le mouvement d'un plan est déterminé (fig. 36) par la condition qu'une courbe* C_1 *située dans ce plan roule sans glissement sur une courbe plane donnée* C; *lieu des positions des centres de courbure oblique de la courbe* C_1 *correspondant aux divers points de contact des courbes* C_1, C.

Coordonnées du lieu. — Si l'on appelle σ_1 l'enveloppe du rayon r_1 qui varie d'après une loi donnée dans le plan de

Fig. 36.



la courbe C_1, les équations de cette courbe, d'après le système tangentiel exposé au Chapitre III du Livre I, seront, par rapport à la courbe C_1, en appelant di_1 l'angle de contingence de cette enveloppe

$$(1)\quad r_1\,di_1 = ds_1 \sin a_1,\quad d\sigma_1 = dr_1 + ds_1 \cos a_1,\quad \frac{\sin a_1}{r_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{D_1};$$

or, pendant que le plan de la courbe C_1 se meut, il entraîne avec lui le rayon r_1, qui a une enveloppe σ dans le plan fixe. Si l'on rapporte cette enveloppe à la courbe s dans ce plan, on aura, di étant l'angle de contingence de cette enveloppe, les équations

$$(1')\quad r\,di = ds \sin a,\quad d\sigma = -dr + ds \cos a,\quad \frac{\sin a}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D};$$

or il est évident que l'on a les relations suivantes :

$$(2)\quad a = a_1,\quad ds = ds_1,\quad r\,di = r_1\,di_1,\quad d(\sigma_1 - r_1) = d(\sigma + r),$$

lesquelles entraînent la condition

$$(2')\quad \frac{1}{D} = -\frac{1}{D_1}\quad \text{ou bien}\quad \frac{1}{D_1} = \frac{da}{ds},\quad \frac{1}{D} = -\frac{da}{ds}.$$

Cela posé, rapportons le lieu des positions des centres de courbure oblique de la courbe C_1 à la courbe enveloppe σ, en employant le système de coordonnées tangentielles du Chapitre IV. Soient $d\Sigma_1$ l'élément d'arc de courbe de lieu, Γ_1 son rayon de courbure, α_1 l'angle du rayon r_1 avec l'élément $d\Sigma_1$, on aura les équations

$$(3)\quad (r+r_1)di = \sin\alpha_1\, d\Sigma_1, \quad d(r+r_1+\sigma) = \cos\alpha_1\, d\Sigma_1.$$

Si l'on divise l'une par l'autre, on obtient la relation

$$(r+r_1)\cot\alpha_1 = \frac{d(r+r_1)}{di} + \frac{d\sigma}{di} = \frac{d\sigma_1}{di};$$

or, si l'on appelle $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}$ les rayons de courbure de σ_1, σ, on obtient

$$(4)\qquad (r+r_1)\cot\alpha_1 = \mathfrak{R}_1 \frac{r}{r_1}.$$

Cette formule fait connaître l'angle du rayon r_1 avec l'élément $d\Sigma_1$.

Rayon de courbure. — Pour obtenir le rayon de courbure Γ_1, on fera usage de la formule (6″) du n° 62, laquelle devient

$$(5)\quad \frac{1}{\Gamma_1} = \frac{(r+r_1)^2 + \frac{d\sigma_1^2}{di^2} + \frac{d\sigma_1 - d\sigma}{di}\frac{d\sigma_1}{di} - (r+r_1)\frac{d^2\sigma_1}{di^2}}{\left[(r+r_1)^2 + \frac{d\sigma_1^2}{di^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\lambda_1^2 = (r+r_1)^2 + \left(\frac{d\sigma_1^2}{di^2}\right);$$

si l'on remarque que l'on a les relations

$$\frac{d\sigma_1}{di} = \frac{d\sigma_1}{di_1}\frac{r}{r_1}, \quad \frac{d}{di}\left(\frac{d\sigma_1}{di}\right) = \frac{r}{r_1}\frac{d}{di_1}\left(\frac{d\sigma_1}{di_1}\frac{r}{r_1}\right),$$

et que λ_1 est l'hypoténuse du triangle rectangle dont un côté

est $(r+r_1)$, et l'angle opposé α_1, on obtient

$$(5')\quad \frac{1}{\Gamma_1}=\frac{(r+r_1)^2+\frac{r^2}{r_1^2}\mathfrak{R}_1^2+\left(\frac{r\mathfrak{R}_1-r_1\mathfrak{R}}{r_1}\right)\frac{r}{r_1}\mathfrak{R}_1-(r+r_1)\frac{r}{r_1}\frac{d}{di_1}\left(\frac{r}{r_1}\mathfrak{R}_1\right)}{\lambda_1^3}.$$

On peut faire subir à cette expression une nouvelle transformation. En effet, on a

$$\frac{d}{di_1}\left(\frac{r}{r_1}\mathfrak{R}_1\right)=\mathfrak{R}'_1\frac{r}{r_1}+\frac{\mathfrak{R}_1}{rr_1^2}\left(r_1^2\frac{dr}{di}-r^2\frac{dr_1}{di_1}\right).$$

Or les formules (1) et (1′) donnent les relations

$$\frac{dr_1}{di_1}=\frac{d\sigma_1}{di_1}-r_1\cot a_1,\quad \frac{dr}{di}=-\frac{d\sigma}{di}+r\cot a.$$

On en déduit la relation

$$\frac{d}{di_1}\left(\frac{r}{r_1}\mathfrak{R}_1\right)=\frac{r}{r_1}\mathfrak{R}'_1-\mathfrak{R}_1 r\left(\frac{\mathfrak{R}}{r^2}+\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^2}\right)+\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1}(r+r_1)\cot a;$$

par suite, on a l'équation

$$(5'')\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\lambda_1^3}{\Gamma_1}=&(r+r_1)^2\left(1-\frac{r}{r_1}\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1}\cot a\right)\\ &-(r+r_1)\left[\frac{r^2}{r_1^2}\mathfrak{R}'_1-\frac{r^2}{r_1}\left(\frac{\mathfrak{R}}{r^2}+\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^2}\right)\mathfrak{R}_1\right]\\ &+\frac{r}{r_1}\left[\mathfrak{R}_1^2\frac{r}{r_1}+\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1}(r\mathfrak{R}_1-r_1\mathfrak{R})\right].\end{aligned}\right.$$

Pour passer du cas qui nous occupe au cas où il s'agit de déterminer le lieu des centres de courbure de la courbe C_1, il faut remplacer, dans les formules précédentes, r et r_1 par R, R_1; $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}_1$ par R'_1, R''_1; $\mathfrak{R}'_1$ par R''_1, et poser $a=\frac{\pi}{2}$; on obtient alors l'équation (5) du numéro précédent.

Si la courbe C devient une droite, il faut poser R infini et R′ nul; on trouve alors, pour le rayon de courbure γ_1 du

lieu des centres de courbure de l'expression suivante,

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{\frac{R_1'^2}{R_1^3} - \frac{R_1''}{R_1^2}}{\left(1 + \frac{R_1'^2}{R_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

qui coïncide avec la formule (3) du n° 79, obtenue par une autre méthode.

107. Problème V. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème III, lieu des positions sur le plan fixe des points situés sur le rayon de courbure de la courbe* C_1 *au point de contact des deux courbes à une distance* L *de ce point donnée par la relation suivante, dans laquelle m est constante :*

$$(1) \qquad \frac{m}{L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Tangente du lieu. — Conservons les notations du n° 105, on a les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} (R + L)\,d\varepsilon = \sin\alpha\, d\Sigma, & d\sigma + d(R + L) = \cos\alpha\, d\Sigma, \\ R\,d\varepsilon = R_1\, d\varepsilon_1, & d\sigma + dR = 0; \end{cases}$$

on déduit de ces équations la relation

$$(3) \qquad \frac{dL}{d\varepsilon} = (R + L)\cot\alpha = \frac{L^2 R}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R_1'}{R_1^3}\right).$$

Cette équation fait connaître la direction de la tangente à la courbe.

Rayon de courbure. — Pour avoir le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ de la courbe Σ, il suffit de faire usage des formules (6) du n° 63, que l'on peut écrire sous la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D} = \left[r^2 + \frac{(dr + d\sigma)^2}{d\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{D}} = \frac{\frac{dr}{d\varepsilon}\left(\frac{dr + d\sigma}{d\varepsilon}\right) - r\,\frac{d^2(r + \sigma)}{d\varepsilon^2}}{\mathfrak{D}^3}. \end{cases}$$

Il faut avoir égard, dans ces formules, aux relations suivantes :

$$r = R + L, \quad \frac{dr + d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{dL}{d\varepsilon},$$

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = R' + \frac{dL}{d\varepsilon}, \quad \frac{d^2(r+\sigma)}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2 L}{d\varepsilon^2};$$

d'après cela, on a l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{D}} = \frac{\left(R' + \frac{dL}{d\varepsilon}\right)\frac{dL}{d\varepsilon} - (R+L)\frac{d^2L}{d\varepsilon}}{\mathfrak{D}^3};$$

or on a

$$\frac{dr}{d\varepsilon}\frac{dr+d\sigma}{d\varepsilon} = \left[R' + \frac{L^2R}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)\right]\frac{L^2R}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right),$$

$$r\frac{d^2(r+\sigma)}{d\varepsilon^2} = \left(\frac{R+L}{m}\right)\left\{\left[L^2R' + 2\frac{R^2L^3}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)\right]\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)\right.$$
$$\left. + L^2R^2\left(\frac{R''}{R^4} + \frac{R''_1}{R_1^4}\right) - 3L^2R^2\left(\frac{R'^2}{R^5} + \frac{R'^2_1}{R_1^5}\right)\right\};$$

conséquemment on obtient l'équation

$$(5')\ \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{D}} = -\frac{1}{\mathfrak{D}^3}\Bigg\{ & \frac{L^3R'}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right) + \frac{L^3R}{m^2}(LR + 2R^2)\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)^2 \\ & + \left[L^2R^2\left(\frac{R''}{R^4} + \frac{R''_1}{R_1^4}\right) - 3L^2R^2\left(\frac{R'^2}{R^5} + \frac{R'^2_1}{R_1^5}\right)\right]\frac{(R+L)}{m}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

équation que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(5'')\ \left\{\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{D}} + \frac{1}{m}\frac{L^2R^2}{\mathfrak{D}^3} \\ & \quad \times\Bigg\{R\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)\left(\frac{1+m}{m}\frac{R'}{R^3} + \frac{1}{m}\frac{R'_1}{R_1^3}\right) \\ & \quad + (R+L)\left[\frac{L}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)^2 - 3\left(\frac{R'^2}{R^5} + \frac{R'^2_1}{R_1^5}\right) + \frac{R''}{R^4} + \frac{R''_1}{R_1^4}\right]\Bigg\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation fait connaître le rayon de courbure $\mathcal{R}$ du lieu.

Si dans les équations précédentes on fait m égal à -1, on a sur le plan fixe le lieu des positions des centres instantanés d'accélération du plan mobile.

Problème VI. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver sur le plan mobile le lieu des positions du point situé sur le rayon de courbure de la courbe* C_1 *au point de contact des deux courbes, à une distance* L *de ce point de contact marqué par l'équation*

$$(1') \qquad -\frac{m}{L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Dans la question présente, il faut rapporter le lieu à la développée σ' de la courbe C_1 située dans le plan mobile.

Tangente. — Les conditions du problème sont les suivantes, en introduisant l'auxiliaire L_1 telle que $L_1 + L = 0$:

$$(2') \quad \begin{cases} (R_1 + L_1) d\varepsilon_1 = \sin\alpha_1 \, d\Sigma_1, & d\sigma_1 + d(R_1 + L_1) = \cos\alpha_1 \, d\Sigma_1, \\ R \, d\varepsilon = R_1 \, d\varepsilon_1, & d\sigma_1 + dR_1 = 0. \end{cases}$$

On aura donc l'équation suivante, qui donne la direction de la tangente :

$$(3') \qquad \frac{dL_1}{d\varepsilon_1} = (R_1 + L_1)\cot\alpha_1 = \frac{L_1^2 R_1}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right).$$

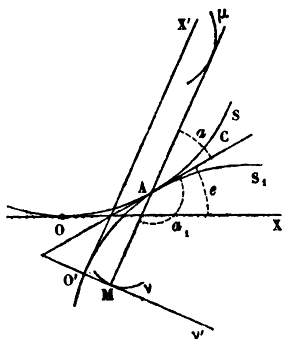
Rayon de courbure. — On trouvera les relations suivantes, en introduisant l'auxiliaire $\mathcal{D}_1$

$$(4') \qquad \frac{1}{\mathcal{D}_1} = \left[(R_1 + L_1)^2 + \frac{L_1^4 R_1^2}{m^2}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{R}_1} - \frac{1}{\mathcal{D}_1} + \frac{1}{m}\frac{L_1^2 R_1^2}{\mathcal{D}_1^3} \\ & \quad \times \Bigg\{ R_1 \left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)\left(\frac{1+m}{m}\frac{R'_1}{R_1^3} + \frac{1}{m}\frac{R'}{R^3}\right) \\ & \qquad + (R_1 + L_1)\left[\frac{L_1}{m}\left(\frac{R'}{R^3} + \frac{R'_1}{R_1^3}\right)^2 - 3\left(\frac{R'^2}{R^5} + \frac{R'^2_1}{R_1^5}\right) + \frac{R''}{R^4} + \frac{R''_1}{R^4}\right] \Bigg\} = 0 \end{aligned} \right.$$

108. Problème VII. — *Une courbe s_1 roule (fig. 37) sur une*

Fig. 37.



autre courbe s; enveloppe v d'une droite v' située dans le plan de la courbe roulante C_1.

Ce problème, que nous avons ébauché au n° 50, se présente ici comme conséquence du n° 103. Supposons que $\frac{ds_1}{da} = D$ soit l'équation élémentaire de la courbe roulante rapportée à un axe O′X′, situé dans son plan et tangent à la courbe au point O′, et que l'équation de la courbe fixe rapportée à l'axe fixe OX soit $\frac{ds}{de} = R$, D étant une fonction de a et R une fonction de e. On suppose qu'au commencement du mouvement les origines O, O′ coïncident, ainsi que les axes OX, O′X′.

Conditions du problème. — Si l'on conserve les notations du n° 102, on aura les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{ds_1} = \sin a_1, & \dfrac{dr_1}{ds_1} = \cos a_1, \quad \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{da_1}{ds_1}; \\ \dfrac{r\,d\varepsilon}{ds} = \sin a, & \dfrac{d(r+\sigma)}{ds} = \cos a, \quad \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin a}{r} + \dfrac{da}{ds}; \end{cases}$$

Les équations de la première ligne représentent les équations d'un point situé à l'infini dans le plan mobile sur la direction de AM, ce point étant la développée de la droite

$O'M(\nu)$; dp_1 est la distance de deux droites parallèles AM, A′M′ infiniment voisines, r_1 la distance de A à la droite donnée ν'. Il faut joindre aux relations précédentes les conditions

$$(2) \qquad ds = ds_1, \quad a + a_1 = 2\pi.$$

On déduit

$$(3) \qquad \frac{ds}{da_1} = -\frac{ds}{da};$$

la développée de l'enveloppe (ν) aura donc pour équations celles qui représentent le mouvement d'un rayon mobile $A\mu$ dont un point A glisse sur une directrice C avec une vitesse $\frac{ds}{dt}$, pendant que le rayon tourne autour du point A avec la vitesse de rotation par rapport à la tangente $\frac{da}{dt}$, le rapport de ces vitesses étant donné et égal à D.

Tangente à l'enveloppe ν. — Si l'on ajoute entre elles celles des équations (1) qui donnent $\cos a$, $\cos a_1$, on trouve la relation

$$(4) \qquad d(r + r_1 + \sigma) = 0;$$

or, r_1 représentant la distance du point A à un point μ_1 situé à l'infini dans la direction AM, $M\mu_1$ sera une constante et l'on aura la relation

$$(5) \qquad dr_1 = d(A\mu_1) = d(AM + M\mu_1) = d(AM);$$

d'une autre part on a aussi

$$(6) \qquad dr = d(A\mu);$$

donc la relation

$$(7) \qquad d\sigma + d\mathfrak{R} = 0$$

donnera, en vertu de l'équation (4), la condition

$$(8) \qquad \mathfrak{R} = MA + A\mu = M\mu.$$

Rayon de courbure. — En ajoutant entre elles les équations (1) relatives à $\sin a$, $\sin a_1$, on trouve la formule

$$(9) \qquad \frac{\sin a}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D_1}.$$

Cette équation et la précédente donnent le rayon de courbure de l'enveloppe, et l'on retombe sur des équations et des constructions déjà connues.

Si la courbe C est une droite, il faut poser $\frac{1}{R} = 0$ dans l'équation (9), qui devient

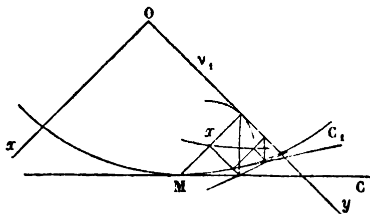
$$(9') \qquad \frac{\sin a}{r} = \frac{1}{R_1}.$$

De là on tire la proposition suivante :

Le symétrique du centre de courbure de la courbe C_1 *par rapport à la tangente à cette courbe se projette sur la direction de r, sur le centre de courbure de l'enveloppe de la droite.*

Quadrature. — Dans le cas où la courbe C est une droite (*fig.* 38), soit Ω l'aire de l'enveloppe de la droite ν_1, aire balayée

Fig. 38.



par la droite qui joint le point de contact M des courbes C et C avec le point de contact correspondant de la droite ν_1 et de son enveloppe; soit V l'aire de la podaire de l'enveloppe, aire balayée par la droite abaissée du pied de chaque ordonnée x de la courbe C_1 perpendiculairement à la tangente menée par l'autre extrémité de x; soit U l'aire balayée par la portion de la tangente à la courbe C_1, comprise entre le point

de contact et le pied de la perpendiculaire dont nous venons de parler; soit W l'aire balayée par la projection de cette portion de tangente sur l'ordonnée x de la courbe C_1.

Si l'on remarque que $d\Omega$ se compose d'un rectangle $x\,dy$ provenant du passage d'un point de l'enveloppe de ν_1 à un point infiniment voisin et d'un triangle $\frac{1}{2}x^2 de_1$ provenant de la rotation de la figure autour du centre instantané, on a la relation

$$\Omega = \frac{1}{2}\Sigma x^2 de_1 + \Sigma x\,dy.$$

Si l'on remarque que dV se compose d'un rectangle dont les deux dimensions sont $x \sin a$, $dy \sin a$, et d'un secteur dont l'angle est de_1 et le rayon $x \sin \alpha$, on a

$$V = \frac{1}{2}\Sigma x^2 \sin^2 a\,de_1 + \Sigma x \sin^2 a\,dy;$$

si l'on retranche l'une de l'autre, on obtient

$$(10) \qquad \Omega - V = \frac{1}{2}\Sigma x^2 \cos^2 a\,de_1 + \Sigma x \cos^2 a\,dy;$$

or le premier terme du second membre n'est autre que U, et le second terme n'est autre que W; on a donc la relation

$$(10') \qquad \Omega = V + U + W,$$

qui donne l'aire de l'enveloppe en fonction des trois aires U, V, W que nous venons de définir. Il va sans dire que, dans cette formule, les aires doivent correspondre à un même arc de la courbe C_1.

Application. — La courbe C_1 est un cercle de rayon OC(a) et la courbe ν_1 un diamètre. Lorsque la courbe C_1 roule sur la droite, elle enveloppe, après une rotation complète, deux cycloïdes successives engendrées par un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ pendant qu'il roule sur la droite C; donc $\Omega = \frac{3}{2}\pi a^2$.

Le lieu des projections T des pieds des ordonnées du cercle a sur les tangentes correspondant à ces ordonnées a pour équation

$$x = \left(a^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}};$$

or l'aire V complète de cette courbe, qui est quarrable, est $\frac{9}{8}\pi a^2$; l'aire U, engendrée par la portion de tangente, est donc $\frac{1}{8}\pi a^2$.

Le lieu des projections de points T sur les ordonnées correspondantes est

$$x = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}};$$

et l'aire W comprise entre cette courbe et le cercle est encore quarrable et égale à $\frac{2}{8}\pi a^2$; on a donc

$$\frac{3}{2}\pi a^2 = \frac{9}{8}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{2}{8}\pi a^2 = \frac{12}{8}\pi a^2,$$

ce qui est la vérification du théorème.

Nous avons jugé convenable de vérifier ce théorème auquel nous sommes arrivé, parce que nous n'avons trouvé nulle part son énoncé.

109. PROBLÈME VIII. — *Une courbe* C_1 *roule* (*fig.* 39) *sur une droite et entraîne le plan qui la contient; roulette engendrée par un point* O_1 *de son plan.*

Tangente et point de courbure. — Il suffit, dans les formules du n° 101, de poser R égal à l'infini. La tangente de la roulette se construit comme au numéro désigné; le rayon de courbure s'obtient plus simplement. En effet, la formule relative aux rayons de courbure devient

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\sin\alpha = \frac{1}{R_1}.$$

De là on déduit le théorème suivant :

Prenez le point D *symétrique du centre de courbure de* C_1 *par rapport à la tangente en* A; *projetez le double de cette*

Fig. 39.

distance AD *sur la direction de* r, *l'extrémité* B *sera le centre de courbure de la roulette.*

Quadrature de la roulette. — Soient AO_1, $A'O'_1$ deux positions du rayon r_1 infiniment voisines. Le quadrilatère infinitésimal $AA'O'_1O_1$ se compose de l'aire $AA'O_1$, qui a pour expression $\frac{1}{2}r_1^2\,d\theta_1$, et de l'aire $O_1A'O'_1$ qui a pour expression $\frac{1}{2}r_1^2\,de_1$, puisque la figure a tourné autour de l'axe de rotation d'un angle égal à l'angle de contingence de la courbe C_1; l'expression de la différentielle du de l'aire de la roulette est donc

$$(2)\qquad du = \frac{1}{2}(r_1^2\,d\theta + r_1^2\,de_1);$$

or, si l'on réduit les rayons de courbure de la courbe C_1 à partir du centre de courbure, dans le rapport K de R_1 à r_1, en appelant V l'aire balayée par le rayon vecteur r_1 et W celle balayée par KR_1, l'équation précédente donnera par intégration

$$(2')\qquad u = V + W.$$

Considérons la podaire de la courbe C_1 par rapport au point O_1,

l'aire élémentaire balayée par O_1M est $\frac{1}{2} r_1^2 \sin^2 a_1 de_1$; celle balayée par la tangente est $\frac{1}{2} r_1^2 \cos^2 a_1 de_1$, leur somme donne $\frac{1}{2} r_1^2 de_1$. Si l'on appelle U et V_1 les deux premières aires, on aura l'équation

$$(3) \qquad W = V_1 + U;$$

conséquemment l'équation (2) deviendra

$$(2'') \qquad u = V + V_1 + U.$$

Si la courbe C_1 est fermée et que le point A ait fait une révolution complète sur cette courbe, la somme des deux premiers termes du second membre de l'équation précédente représente l'aire U de la podaire; on a donc pour une courbe fermée ce théorème, qui est dû à Steiner :

Si la courbe C_1 est fermée, l'aire de la roulette décrite par un point O_1 du plan de cette courbe roulant sur une tangente est le double de l'aire de la podaire de la courbe C_1 par rapport au point O_1.

On déduit de l'équation (3) le théorème suivant :

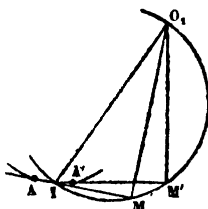
Si l'on prend sur les tangentes à un arc de développée d'un arc de la courbe C_1 des longueurs égales à r_1, l'aire balayée par r_1 est la somme des deux aires balayées : la première par les perpendiculaires abaissées du point O_1 sur les différentes tangentes de l'arc de C_1, et la seconde pour les longueurs des tangentes à cet arc terminées aux pieds de ces perpendiculaires.

Rectification de la roulette. — L'arc élémentaire de la roulette a pour expression $r_1 de_1$; or l'arc élémentaire de la podaire a pour expression $\frac{O_1 M de_1}{\sin a_1}$, puisque le quadrilatère $IMM'\Theta'$ est inscriptible; or $O_1M = r_1 \sin a$: il résulte que les arcs élémentaires des deux courbes sont égaux.

On déduit de là le théorème suivant, qui est dû à Steiner (*fig.* 40) :

Si l'on fait rouler un arc de courbe C_1 *sur la tangente en l'une de ses extrémités, l'arc de roulette engendrée par un*

Fig. 40.



point O_1 *est égal à l'arc de podaire obtenu en abaissant du point* O_1 *des perpendiculaires sur les tangentes de cet arc.*

Coordonnées rectangles. — Soient α, β les coordonnées du point O_1 par rapport à deux axes rectangulaires dont l'axe des x coïncide avec la droite. On a

$$\alpha = s_1 + r_1 \frac{dr_1}{ds_1}, \quad \beta = \frac{r_1 d\theta_1}{ds_1},$$

pourvu que l'arc s_1 soit compté à partir du point qui, pendant le roulement, coïncidait avec l'origine des axes rectangulaires.

Ce sont les équations de la roulette.

Applications. — La courbe roulante C_1 est donnée par l'équation (n° 75)

$$r = r_0 \cos^{-\frac{1}{m}} m\theta; \tag{1}$$

on déduit de cette équation les coordonnées rectangles du point de la courbe

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r_0 \cos\theta}{\cos^{\frac{1}{m}} m\theta}, \quad y = \frac{r_0 \sin\theta}{\cos^{\frac{1}{m}} m\theta}; \\ dx &= \frac{r_0\, d\theta}{\cos^{1+\frac{1}{m}} m\theta} \sin(m-1)\theta, \\ dy &= \frac{r_0\, d\theta}{\cos^{1+\frac{1}{m}} m\theta} \cos(m-1)\theta; \end{aligned} \right.$$

et conséquemment

(3) $$\tang e = \cot(m-1)\theta, \quad ds = \frac{r_0}{\cos^{1+\frac{1}{m}} m\theta}\, d\theta.$$

On déduit de ces équations, en remarquant que $e = a + \theta$, les deux relations angulaires

(4) $$e = \frac{\pi}{2} - (m-1)\theta, \quad m\theta = \frac{\pi}{2} - a;$$

par suite, les valeurs de r et R en fonction de a seront

(5) $$R = \frac{r_0}{1-m}\,\frac{1}{\sin^{1+\frac{1}{m}} a}, \quad r = r_0 \sin^{-\frac{1}{m}} a.$$

Si l'on a égard à ces valeurs de R et r, on trouve par l'équation (1) l'expression suivante de r_1 :

(6) $$\frac{1}{r_1} = -\frac{m}{r_0}\sin^{-\frac{1}{m}} a;$$

or, si l'on fait usage de la relation (4) du n° 101, on trouve pour la développée σ_1 de la roulette l'équation naturelle

(7) $$\frac{d\sigma_1}{da_1} = \left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{r_0}{m}\,\frac{\sin^{-\frac{1}{m}} a_1 \cos a_1}{\sin a_1},$$

et pour équation naturelle de la roulette $d\sigma$, en appelant ε l'angle que cet élément fait avec l'axe ox et C la constante de l'intégration,

(8) $$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = -r_0\left(\frac{1}{m} - 1\right)\sin^{-\frac{1}{m}}\varepsilon + C.$$

L'équation naturelle de l'équation (1) est, d'après la première des équations (5) et les relations (4),

(9) $$\frac{ds}{de} = \frac{r_0}{1-m}\cos^{-\left(1+\frac{1}{m}\right)}\frac{m}{m-1}\left(\frac{\pi}{2} - e\right).$$

Cas particuliers. — 1° Si la courbe (1) est un cercle rapporté à un point de la circonférence, m est égal à -1; l'équation (8) donne l'équation de la cycloïde.

2° Si la courbe (1) est une parabole rapportée à son foyer, $m=\frac{1}{2}$, les équations (9) et (8) deviennent

$$\frac{ds}{de}=\frac{2r_0}{\sin^3 e},\quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon}=-\frac{r_0}{\sin^2\varepsilon};$$

la première représente une parabole et la seconde une chaînette.

3° Si la courbe (1) représente une hyperbole équilatère rapportée à son centre $m=2$, les mêmes équations deviennent

$$\frac{ds}{de}=-\frac{r_0}{(1-2\sin^2 e)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\frac{r_0}{2\sin^{\frac{1}{2}}\varepsilon};$$

or la première appartient, d'après le n° 35, à l'hyperbole équilatère, et la seconde est l'équation naturelle de la courbe élastique rectangulaire.

Remarque I. — Il est bon de dire que les courbes (8) renferment comme cas particulier cette série de courbes que nous avons étudiées au n° 28 et au n° 29 en donnant à m des valeurs entières. Aussi toutes ces courbes sont les roulettes d'autres courbes contenues dans la formule (9) du présent numéro, et que l'on obtient en donnant à m les valeurs entières correspondantes.

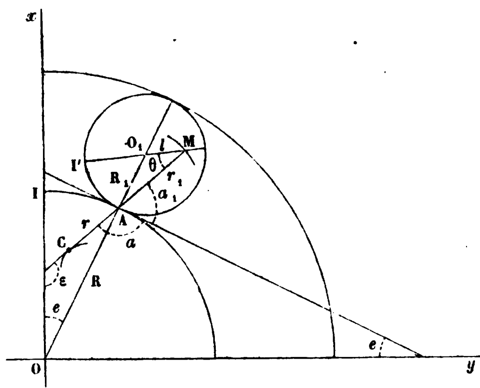
Remarque II. — Il n'est aucun lecteur qui n'ait remarqué la puissance de la méthode que nous venons d'employer, puisqu'elle fait connaître toute la famille des roulettes engendrées par une famille de courbes données.

110. *De l'épicycloïde allongée ou raccourcie.* — Si l'on fait rouler un cercle de rayon R_1 sur un cercle de rayon R, un point du plan du premier décrit sur le plan du second une épicycloïde *allongée* ou *raccourcie*, suivant que le point est extérieur ou intérieur au premier cercle. La théorie de ces épicycloïdes est un cas particulier du problème I (n° **101**).

L'équation du cercle roulant (*fig.* 41), rapportée au point décrivant, est

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{\sin a_1}{r_1} + \frac{da_1}{ds_1};$$

Fig. 41.



l'équation du cercle fixe, rapportée à la développée de la roulette, est

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\sin a}{r} + \frac{da}{ds};$$

on déduit, par l'addition de ces deux équations, membre à membre, et en remarquant que l'on a $a + a_1 = 2\pi$, $ds = ds_1$,

$$(3) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \sin a_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

D'une autre part, on a les conditions

$$(4) \qquad \frac{\cos a_1}{l} = \frac{\sin\theta}{R_1}, \quad r_1 = R_1 \sin a_1 + l\cos\theta,$$

et si l'on pose

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{2}{M},$$

on obtient les deux équations

$$(5)\qquad \frac{1}{r_1}=\frac{R}{R_1^2-l^2}\sin a_1-\frac{\sqrt{l^2-R_1^2\cos^2 a_1}}{R_1^2-l^2},\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}=\frac{2}{M\sin a_1}.$$

Relations angulaires. — Le triangle OAC donne

$$(6)\qquad \varepsilon+e=a_1+\frac{\pi}{2},$$

et si l'on exprime que les deux arcs AI, AI_1 sont égaux, on aura les équations

$$(7)\qquad s=Re=R_1\left(\theta+\frac{\pi}{2}-a_1\right)=s_1;$$

or

$$\theta=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{R_1}{l}\cos a_1\right);$$

substituant,

$$R\varepsilon=R\left(a_1+\frac{\pi}{2}\right)+R_1\left(a_1-\frac{\pi}{2}\right)-R_1\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{R_1}{l}\cos a_1\right).$$

Rapport des vitesses $\frac{ds_1}{dt}$, $\frac{da_1}{dt}$. — Si, dans la première équation, on remplace r_1 par sa valeur, on obtient

$$\frac{da_1}{ds_1}=\frac{\sqrt{l^2-R_1^2\cos^2 a_1}}{R_1\left(R_1\sin a_1+\sqrt{l^2-R_1^2\cos^2 a_1}\right)}.$$

Rayon de courbure de la roulette. — Soit $d\Sigma$ l'élément d'arc de la roulette, dE l'angle de contingence, on a les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}=\dfrac{d\Sigma}{dE}=r_1+r,\\[2mm] r_1=\dfrac{R_1^2-l^2}{R_1\sin a_1-\sqrt{l^2-R_1^2\cos^2 a_1}},\\[2mm] r=\dfrac{(R_1^2-l^2)M\sin a_1}{2(R_1^2-l^2)-M\sin a_1\left(R_1\sin a_1-\sqrt{l^2-R_1^2\cos^2 a_1}\right)}; \end{cases}$$

$$(11)\qquad E=\varepsilon-\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on exprime a_1 en fonction de E, au moyen des relations angulaires établies ci-dessus, on aura l'équation élémentaire de la roulette

$$r = \frac{RR_1(R_1^2 - l^2)\sin a_1}{(R+R_1)(R_1^2 - l^2) - RR_1 \sin a_1 (R_1 \sin a_1 - \sqrt{l^2 - R_1^2 \cos^2 a_1})}.$$

111. *Équations en termes finis.* — Soient D, N les projections des points M, O_1 sur l'axe des x, on a

$$OD = ON + ND;$$

or on obtient directement les relations

$$ON = (R + R_1)\cos e,$$

$$ND = l\cos(MOx) = l\cos(I_1O_1A + e) = l\cos\left(\frac{R}{R_1}e + e\right);$$

conséquemment, si l'on appelle x et y les coordonnées rectangles du point décrivant M, on aura, en prenant les projections des points O_1, M sur l'axe des y et en raisonnant comme nous venons de le faire, les équations cartésiennes de l'épicycloïde allongée

$$x = (R + R_1)\cos e + l\cos\frac{R + R_1}{R_1}e,$$

$$y = (R + R_0)\sin e + l\sin\frac{R + R_1}{R_1}e.$$

Si l'on appelle ρ le rayon vecteur et ψ l'angle qu'il fait avec l'axe des x, on aura les équations polaires de la courbe

$$\rho^2 = (R + R_1)^2 + l^2 + 2l(R + R_1)\cos\frac{R}{R_1}e,$$

$$\tang\psi = \frac{(R + R_1)\sin e + l\sin\left(\frac{R + R_1}{R_1}e\right)}{(R + R_1)\cos e + l\cos\left(\frac{R + R_1}{R_1}e\right)},$$

$$-1 = \frac{R + R_1}{l}\,\frac{\sin(\psi - e)}{\sin\left(\psi - \frac{R + R_1}{R_1}e\right)}.$$

On peut tirer de la première de ces équations e en fonction de ρ, et en portant cette valeur de e dans la deuxième, on obtient en coordonnées polaires l'équation d'une épicycloïde allongée ou raccourcie quelconque en termes finis.

Cas particuliers. — 1° Si $R_1 = R$, on a les deux équations

$$\rho^2 = 4R^2 + l^2 + 4lR\cos e, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{2R\sin e + l\sin 2e}{2R\cos e + l\cos 2e};$$

2° Si $R = 2R_1$, on a les deux suivantes :

$$\rho^2 = \frac{9R^2}{4} + l^2 + 3l\cos 2e, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{3\sin e + l\sin 3e}{3\cos e + l\cos 3e}.$$

CHAPITRE III.

DES COURBES PRODUITES PAR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE INVARIABLE.

Ce Chapitre est consacré à l'étude des courbes engendrées par des points ou enveloppées par des droites d'une figure plane invariable qui se meut parallèlement à son plan. La détermination des éléments de ces courbes dépend de l'analyse précédente et se fait d'une manière aussi rapide que naturelle, comme cela va résulter des questions que nous allons résoudre.

§ I. — Principes.

112. Problème I. — *Le mouvement d'un plan mobile est déterminé par la condition que deux de ses points* O, O_1 *glissent constamment sur deux courbes* ν, ν_1 *situées dans le plan fixe : trouver la courbe* ν_2 *engendrée par un troisième point fixe* O_2 *du plan mobile.*

1° Il est évident que le mouvement du plan mobile est le mouvement parallèle au plan fixe le plus général qu'on puisse supposer. Car, quel que soit le mouvement d'un plan mobile parallèlement à un plan fixe, deux points déterminés du premier plan parcourent deux courbes déterminées sur le second. Donc, réciproquement, si l'on donnait les deux points dans le plan mobile et les deux courbes trouvées sur le plan fixe, on aurait le mouvement dont il s'agit.

2° Ce mouvement est équivalent à un mouvement de roulement d'une courbe mobile C_1 sur une courbe fixe C, la courbe mobile conduisant son plan. En effet, si l'on se reporte au problème des roulettes, n° 101, on voit qu'un point O' pris sur le plan mobile engendre une courbe ν sur le plan fixe; si

l'on considère un second point O'_1 sur le plan mobile, ce point engendre une seconde courbe ν_1 sur le plan fixe, de sorte que le mouvement de roulement du plan mobile serait produit si ce plan était conduit par les deux points O' et O'_1 invariablement liés à ce plan et glissant sur les deux courbes ν, ν_1 préalablement tracées sur le plan fixe. Ces deux mouvements sont donc équivalents.

3° Il est toujours possible, quand le mouvement est défini par les conditions du présent problème, de trouver le mouvement de roulement équivalent; il suffira, dans les positions successives des points O', O'_1 sur les courbes ν, ν_1, de mener des normales aux courbes en ces points. On marquera sur le plan mobile et sur le plan fixe la série des points d'intersection A, A_1, A_2, A_3,..., B, B_1, B_2, B_3 des normales correspondantes; la série des premiers points donnera la courbe roulante et la série des seconds la courbe directrice. Et il est évident que le mouvement sera un mouvement de roulement produit par la courbe $AA_1A_2\ldots A_n$ roulant sur la courbe $BB_1B_2\ldots B_n$. En effet, lorsque A et B coïncident, le mouvement élémentaire est un mouvement de rotation autour du point de coïncidence, puisque les points O' et O'_1 décrivent des arcs de cercle infiniment petits ayant pour rayon, le premier $O'A$, et le second O'_1A. Par la manière dont les polygones infinitésimaux $AA_1A_2\ldots A_n$, $BB_1B_2\ldots B_n$ ont été construits, AA_1 et BB_1 sont égaux; donc les points A_1 et B_1 sont amenés en coïncidence par la rotation, et la nouvelle rotation élémentaire se faisant autour de ce nouveau point de coïncidence amène la séparation des éléments AA_1, BB_1 et la coïncidence des éléments A_1A_2 avec B_1B_2,..., et ainsi de suite.

Normale. — D'après cela, si par les points O', O'_1 on élève des normales aux courbes ν, ν_1, on déterminera par l'intersection de ces normales le point A centre de rotation instantané; en joignant O'_2 avec le point A, on a la normale à la courbe ν_2.

Rayon de courbure. — Les centres de courbure (n° 102) de ν et de ν_1 sont situés le premier sur $O'A$, le second sur O'_1A; or, si l'on prend les conjugués harmoniques d, d_1 du point A, le premier par rapport au centre de courbure de ν et le symétrique de O' relativement au point A, le second par rapport au

centre de courbure de ν_1 et le symétrique de O'_1 relativement au même point A, les trois points d, d_1, A déterminent une circonférence de cercle. Si maintenant on appelle d_2 l'intersection de ce cercle avec la ligne qui joint le point O'_2 au point A, le quatrième harmonique du symétrique du point O'_2, du point A et du point d_2 (A étant le centre de symétrie) sera le centre de courbure de la courbe ν_2 engendrée par le point O'_2. On connaît donc la tangente et le centre de courbure de la courbe ν_2 à chaque instant du mouvement.

Remarque. — Le cercle qui passe par les points A, d, d_1 a pour diamètre AD qui coïncide avec la normale commune aux deux courbes C, C_1 en leur point de contact A; d'ailleurs les points A, D, le centre de courbure de la ligne C, et le symétrique du centre de courbure de la ligne C_1 par rapport au point A sont en proportion harmonique. Donc, l'un de ces deux centres étant connu, l'autre centre est par cela même déterminé.

113. Problème II. — *Le mouvement d'un plan est déterminé par la condition que deux courbes ν', ν'_1 situées dans son plan restent constamment tangentes à deux courbes ν, ν_1 situées dans un plan fixe; courbe enveloppe d'une courbe ν'_2 située dans le plan mobile.*

Si des points de contact E, E_1 (n° 103) des deux courbes ν', ν'_1 avec les courbes ν, ν_1 on élève des perpendiculaires, leur intersection détermine le point A. Or les centres de courbure des courbes ν', ν sont situés sur EA, et de même les centres de courbure des courbes ν'_1, ν_1 sont situés sur E_1A; donc, si l'on prend les conjugués harmoniques d, d_1 du point A, le premier relativement au centre de courbure de ν et du symétrique du centre de courbure de ν' par rapport à A, le second relativement au centre de courbure de ν_1 et au symétrique du centre de courbure de ν'_1 par rapport au point A, les trois points d, d_1, A déterminent un cercle. Si maintenant on appelle d_2 l'intersection de ce cercle avec la perpendiculaire abaissée du point A sur la courbe ν'_2, et qu'on prenne le symétrique par rapport à A du centre de courbure de la courbe ν'_2, le quatrième harmonique de ce point et des points A et d_2 sera le

centre de courbure de la courbe ν_2 enveloppe de la courbe ν'_2. Cette construction donne à la fois la tangente et le rayon de courbure de l'enveloppe ν_2.

Des remarques analogues à celles qui terminent le n° **101** sont également applicables à la question présente.

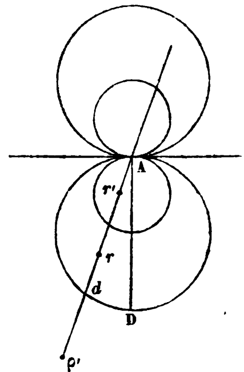
On résoudra sans difficulté et de la même manière la question suivante :

PROBLÈME III. — *Le mouvement d'un plan est déterminé par la condition que l'un des points du plan mobile glisse sur une courbe fixe, tandis qu'une courbe tracée dans le même plan se trouve tangente à une courbe tracée dans le plan fixe : trouver l'enveloppe d'une courbe située dans le plan mobile.*

Remarque. — Dans les problèmes précédents, on pourrait, au lieu de la courbe ν'_2 tracée dans le plan mobile, donner la courbe ν_2 enveloppe de ν'_2. La proportion harmonique donnerait également la tangente et le rayon de courbure de la courbe ν'_2.

Discussion. — Traçons (*fig.* 42) tangentiellement aux courbes C, C' au point A et du même côté que la courbe C deux

Fig. 42.



cercles, le premier de diamètre AD, le second de diamètre $\frac{AD}{2}$, que nous appellerons cercle (AD), cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$; traçons les deux symétriques par rapport à la tangente au point A.

Le centre de courbure d'une courbe ν' située dans le plan mobile peut occuper diverses positions.

1° S'il est intérieur au cercle symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ et s'éloigne du point A, le centre de courbure correspondant est situé dans la même région par rapport à la tangente aux courbes C, C' au point A, et sa distance au point A varie de zéro jusqu'à l'infini. Lorsque le centre de courbure de ν' est à une distance de A moindre ou plus grande que la demi-corde du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ issue de ce point, le centre de courbure de l'enveloppe est intérieur ou extérieur au cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$.

2° Si le centre de courbure de ν' est situé sur la circonférence du cercle symétrique du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$, le centre de courbure de l'enveloppe est situé à l'infini.

3° Si le centre de courbure de ν' est situé entre les symétriques du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ et du cercle (AD), le centre de courbure de l'enveloppe est situé dans la seconde région du plan fixe par rapport à la tangente aux courbes C, C', au point A, partant de l'infini et se rapprochant du cercle (AD).

4° Si le centre de courbure de ν' est situé sur le symétrique du cercle (AD), le centre de courbure de l'enveloppe est situe sur le cercle (AD).

5° Si le centre de courbure de ν' est extérieur au symétrique du cercle (AD), le centre de courbure de l'enveloppe est intérieur au cercle (AD).

6° Si le centre de courbure de ν' est à l'infini (point d'inflexion), le centre de courbure de l'enveloppe se trouve situé sur le cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$.

7° Si le centre de courbure de ν' partant de l'infini négatif s'approche du point A, le centre de courbure de l'enveloppe partant de la circonférence du cercle $\left(\frac{AD}{2}\right)$ s'approche du point A.

8° Si le centre de courbure de ν' est situé en un point de la tangente aux courbes C, C' au point A, le centre de courbure de l'enveloppe ν est le symétrique de ce point par rapport au point A.

114. *De l'accélération de la vitesse.* — La vitesse d'un point mobile s'accélère par suite de la variation de son intensité et de la variation de sa direction. Pour obtenir cette accélération pendant l'unité de temps, on prend des lignes proportionnelles aux deux vitesses pendant deux états infiniment voisins, la première ligne ayant une direction contraire à celle de la vitesse qu'elle représente, et la seconde même direction; on prend la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes, et on la divise par le temps infiniment petit; ce quotient est la mesure de l'accélération totale.

Ainsi soit v la vitesse du mobile à l'instant que l'on considère, $v + dv$ sa vitesse après le temps dt, $d\varepsilon$ l'angle que la direction de la seconde vitesse fait avec la direction de la première; en appelant I la diagonale du parallélogramme, on aura

$$I^2 = v^2 + (v + dv)^2 - 2v(v + dv)\cos d\varepsilon,$$

et conséquemment

$$\frac{I^2}{dt^2} = \frac{4v(v + dv)\sin^2\frac{1}{2}d\varepsilon + dv^2}{dt^2}.$$

En négligeant les infiniment petits de l'ordre supérieur, et en appelant $d\sigma$ l'arc infiniment petit de la trajectoire décrite par le point $\mathcal{R}$, son rayon de courbure, on trouve finalement

$$\text{(1)} \qquad \frac{I^2}{dt^2} = \frac{v^4 d\varepsilon^2}{d\sigma^2} + \frac{dv^2}{dt^2}.$$

La formule que nous venons d'écrire prouve que, si la direction restait la même, l'accélération aurait lieu suivant la tangente; ce serait l'accélération provenant de la variation de l'intensité de la vitesse; elle aurait pour expression $\frac{dv}{dt}$, puisque

$d\varepsilon$ serait nul. Si, l'intensité restant constante, la vitesse variait de direction, $\frac{dv}{dt}$ serait nul; l'accélération aurait pour intensité $\frac{v^2 d\varepsilon}{d\sigma}$ et serait normale à la trajectoire, puisque, dans ce cas, le parallélogramme des vitesses serait un losange et que la diagonale serait bissectrice de l'angle des côtés contigus v et $-v$.

Donc, en représentant par $\frac{I_t}{dt}$ et $\frac{I_n}{dt}$ ces deux accélérations, on a la relation

$$(1') \qquad \frac{I^2}{dt^2} = \frac{I_t^2}{dt^2} + \frac{I_n^2}{dt^2}.$$

On voit que l'accélération totale est la résultante, suivant le rectangle des forces, des deux accélérations normale et tangentielle, et qu'elle fait avec la tangente et la normale n à la trajectoire des angles dont les cosinus ont les expressions suivantes :

$$(2) \quad \cos(I, d\sigma) = \frac{I_t}{I} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{\frac{v^4}{\mathfrak{R}} + \frac{dv^2}{dt^2}}}, \quad \cos(I, n) = \frac{I_n}{I} = \frac{\frac{v^2}{\mathfrak{R}}}{\sqrt{\frac{v^4}{\mathfrak{R}} + \frac{dv^2}{dt^2}}}.$$

De l'accélération normale d'un point de la figure pendant le roulement. — Portons-nous au problème du n° 101 et cherchons l'expression de l'accélération normale d'un point de la figure mobile dont les coordonnées tangentielles par rapport à la courbe C_1 sont r_1 et a_1. Le déplacement réel de ce point, par suite de la rotation élémentaire $d\omega$ de la figure mobile autour du centre instantané A de rotation, sera $r_1 d\omega$; donc, $d\sigma$ étant l'élément d'arc de la roulette, l'accélération normale sera

$$\frac{I_n}{dt} = \frac{r_1^2 \, d\omega^2}{dt^2} \frac{d\varepsilon}{d\sigma};$$

or on a

$$d\omega = de + de_1 = d\varepsilon + d\theta.$$

En ayant égard à la première des équations (1) du n° 101, on

aura

$$d\varepsilon = d\omega - \frac{ds \sin a_1}{r_1};$$

conséquemment

$$\frac{\mathrm{I}_n}{dt} = \frac{r_1^2\, d\omega^2}{dt^2}\left(\frac{d\omega}{d\sigma} - \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{\sin a_1}{r_1}\right),$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{I}_n}{dt} = \frac{r_1^2\, d\omega^2\, ds}{dt^2\, d\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\sin a_1}{r_1}\right).$$

Telle est l'expression de l'accélération normale du point dont il s'agit.

Des centres instantanés d'accélération normale. — On appelle de ce nom les points pour lesquels l'accélération normale est nulle pendant le mouvement de la figure mobile.

D'après la nature de l'équation (3), ces points sont donnés par l'équation

$$(4) \qquad \frac{\sin a_1}{r_1} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1},$$

laquelle montre que, si l'on mène un cercle tangent à la courbe C_1 en son point de contact avec la courbe C, ce cercle ayant pour diamètre la longueur L donnée par l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1},$$

un point quelconque de la circonférence de ce cercle jouit de cette propriété d'être un centre instantané d'accélération normale; nous appelons ce cercle *cercle des centres instantanés d'accélération normale.*

Ce cercle peut servir à la construction du centre de courbure de la roulette; car si l'on considère la formule (6) du n° 101 et qu'on représente par ρ la corde que le rayon r_1 intercepte sur le cercle en question, la formule dont il s'agit devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1},$$

de laquelle on déduit, par une construction facile, la valeur de r.

Mais il est évident que les conceptions purement géométriques qui nous ont servi à interpréter et à construire la formule (6) du nº **101** ne le cèdent ni en simplicité ni en élégance aux conceptions cinématiques que nous venons de développer dans le présent numéro, et elles ont l'avantage de conserver à la théorie son caractère géométrique.

115. Problème IV. — *Les mêmes choses étant données que dans le nº* **112**, *trouver le lieu Σ des centres instantanés dans le plan fixe et le lieu* S *des centres instantanés dans le plan mobile.*

Notations. — A cause des nouvelles courbes qu'il faut considérer, nous modifierons les notations de la manière suivante :

Soient (*fig.* 33 *bis*)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\varepsilon) = \mathfrak{R}, \quad \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \varphi_1(\varepsilon_1) = \mathfrak{R}_1$$

les équations des courbes ν, ν' situées dans le plan fixe et rapportées à la ligne fixe $o\xi$;

Soient

$$\frac{ds}{de} = f(e) = \mathrm{Q}, \quad \frac{ds_1}{de_1} = f_1(e) = \mathrm{Q}_1$$

les équations des courbes n, n_1 situées dans le plan mobile et rapportées à la ligne $o'x$ située dans le plan mobile;

Soient ρ, α, ρ_1, α_1 les coordonnées tangentielles des développées ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$), ν', ν'_1 des courbes ν, ν_1 par rapport à la courbe Σ dont le rayon de courbure est P;

Soient r, a, r_1, a_1 les coordonnées tangentielles des développées (B, B_1), n', n'_1 des courbes n, n_1 par rapport à la courbe S dont le rayon de courbure est R.

Conditions du problème. — On aura pour les courbes ν et n

les équations

$$(\nu)\quad \frac{\rho\, d\varepsilon}{d\Sigma} = \sin\alpha, \quad \frac{d(\rho+\sigma')}{d\Sigma} = \cos\alpha, \quad \frac{1}{P} = \frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{d\alpha}{d\Sigma},$$

$$(n)\quad \frac{r\, de}{dS} = \sin a, \quad \frac{d(r+s')}{dS} = \cos a, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin a}{r} + \frac{da}{dS},$$

avec les conditions

$$(1)\qquad \alpha + a = \pi, \quad dS = d\Sigma, \quad e_1 - e = \varepsilon_1 - \varepsilon,$$

et pour les courbes ν_1, n_1 deux séries d'équations qui se déduisent des précédentes, en affectant toutes les lettres minuscules de l'indice $_1$.

Construire un point du lieu Σ. — Menez une normale au point de contact des courbes ν et n, et une autre normale au point de contact des courbes ν_1 et n_1, l'intersection **M** de ces deux normales est un point du lieu.

Tangente à la courbe Σ. — On déduit des deux couples d'équations précédentes, par l'addition membre à membre des dernières équations (ν), (n), (ν_1), (n_1), les deux relations

$$(2)\quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{R}\right), \quad \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1}\right)\sin\alpha_1 = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{R}\right);$$

or, si l'on représente par ι la moyenne harmonique des segments r et ρ comptés dans le même sens à partir du point **M**, et ι_1 la moyenne harmonique des deux segments r_1 et ρ_1, on a les conditions

$$(3)\qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{2}{\iota}, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{\iota_1}.$$

On déduit des équations (2)

$$\frac{\sin\alpha}{\iota} = \frac{\sin\alpha_1}{\iota_1};$$

or l'angle des deux rayons υ_1, υ est connu et égal à $\alpha_1 - \alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon$; de là on tire la construction suivante :

Joignez les extrémités de υ, υ_1, *abaissez du point* M *une perpendiculaire* MC *sur la ligne* $\upsilon\upsilon_1$, *prenez* MC_1 *symétrique de* MC *par rapport à la bissectrice de l'angle* $\upsilon_1 M \upsilon$, MC_1 *sera la normale cherchée.*

Rayon de courbure de la courbe Σ. — Remarquons que les équations précédentes sont au nombre de quinze : six pour le premier couple de courbes σ, s, six pour le second σ_1, s_1, et les trois équations de condition; or les variables sont au nombre de quatorze, savoir : les dix variables ρ, r, ε, e, α, a, Σ, S, P, R, pour le premier couple de courbes, et les six nouvelles ρ_1, r_1, ε_1, e_1, α_1, a_1, pour le second couple de courbes; on a donc toutes les variables moins une qui sont fonctions de cette dernière, ε par exemple, que l'on suppose être la variable indépendante.

Nous tirons des équations (2) la relation

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\right) \sin\alpha = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1}\right) \sin a_1.$$

En différentiant cette équation, on trouve

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\Sigma} + \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dS}\right)\sin\alpha - \left(\frac{1}{\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{d\Sigma} + \frac{1}{r_1^2}\frac{dr_1}{dS}\right)\sin\alpha_1 \\ &\quad = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{d\Sigma} - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1}\right)\cos\alpha_1\,\frac{d\alpha_1}{d\Sigma}; \end{aligned} \right.$$

or on a les relations

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\rho}{d\Sigma} = \cos\alpha - \frac{\mathfrak{R}'}{\rho}\sin\alpha, && \frac{dr}{dS} = \cos a - \frac{Q'}{r}\sin a, \\ &\frac{d\rho_1}{d\Sigma} = \cos\alpha_1 - \frac{\mathfrak{R}'_1}{\rho_1}\sin\alpha_1, && \frac{dr_1}{dS} = \cos a_1 - \frac{Q'_1}{r_1}\sin a_1, \\ &\frac{d\alpha}{d\Sigma} = \frac{1}{P} - \frac{\sin\alpha}{\rho}, && \frac{d\alpha_1}{d\Sigma} = \frac{1}{P} - \frac{\sin\alpha_1}{\rho_1}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on a égard à ces relations, l'équation (6) devient

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{1}{\rho^3}(\rho\cos\alpha - \mathfrak{R}'\sin\alpha)\sin\alpha \\ +\frac{1}{r^3}(r\cos a - Q'\sin a)\sin a \\ -\frac{1}{r_1^3}(\rho_1\cos\alpha_1 - \mathfrak{R}'_1\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 \\ -\frac{1}{\rho_1^3}(r_1\cos a_1 - Q'_1\sin a_1)\sin a_1 \\ \quad =\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{P}-\frac{\sin\alpha}{\rho}\right)\cos\alpha \\ \quad -\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{P}-\frac{\sin\alpha_1}{\rho_1}\right)\cos\alpha_1. \end{cases}$$

L'équation (8) se transforme, et l'on obtient, après quelques réductions, l'équation

$$(8')\quad \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha - \left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\cos\alpha_1\right]\frac{1}{P} \\ \quad =\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\sin\alpha \\ \quad -\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{2}{\rho_1}-\frac{1}{r_1}\right)\cos\alpha_1\sin\alpha_1 \\ \quad -\left(\frac{\mathfrak{R}'}{\rho^3}+\frac{Q'}{r^3}\right)\sin^2\alpha + \left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\rho_1^3}+\frac{Q'_1}{r_1^3}\right)\sin^2\alpha_1. \end{cases}$$

Rayon de courbure de la courbe S. — On a les relations

$$(10)\qquad \frac{d\alpha}{dS}=\frac{\sin\alpha}{r}-\frac{1}{R},\quad \frac{d\alpha_1}{dS}=\frac{\sin\alpha_1}{\rho_1}-\frac{1}{R}.$$

Soit posé le premier membre de l'équation (8) égal à T, on a, à cause des équations (10), la relation

$$(9)\quad \begin{cases} T=\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{r}-\frac{1}{R}\right)\cos\alpha \\ \quad -\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{\sin\alpha_1}{\rho_1}-\frac{1}{R_1}\right)\cos a_1; \end{cases}$$

par suite, on obtient l'équation

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} &-\left[\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha-\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\cos\alpha_1\right]\frac{1}{R}\\ &=\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{r}\right)\cos\alpha\sin\alpha\\ &-\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{2}{r_1}\right)\cos\alpha_1\sin\alpha_1\\ &+\left(\frac{\mathfrak{R}'}{\rho^3}+\frac{Q'}{r^3}\right)\sin^2\alpha-\left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\rho_1^3}+\frac{Q'_1}{r_1^3}\right)\sin^2\alpha_1.\end{aligned}\right.$$

Si l'on a égard aux équations (3) et qu'on introduise les auxiliaires l, l_1 par les conditions

$$(11)\qquad \frac{2}{r}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{l},\quad \frac{2}{r_1}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{l_1},$$

cette équation devient

$$2\left(\frac{\cos\alpha}{\iota}-\frac{\cos\alpha_1}{\iota_1}\right)\frac{1}{R}=+\frac{2}{rl}\cos\alpha\sin\alpha-\frac{2}{r_1 l_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 -\left(\frac{\mathfrak{R}'}{\rho^3}+\frac{Q'}{r^3}\right)\sin^2\alpha+\left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\rho_1^3}+\frac{Q'_1}{r_1^3}\right)\sin^2\alpha_1.$$

On peut transformer cette équation.

Soit MA (*fig.* 43) la tangente commune aux courbes C et C_1, et MB la normale. Si l'on détermine sur la tangente les points ϖ et p qui ont pour projection ρ et ι sur $M\rho$, et sur la normale les points π et λ qui aient pour projections les points ι et l, et qu'on opère de même par rapport aux points ρ_1, ι_1, l_1 situés sur le rayon $M\rho_1$, on obtient l'équation

$$\left(\frac{1}{Mp}-\frac{1}{Mp_1}\right)\frac{1}{R}=\frac{1}{Mp.M\lambda}-\frac{1}{Mp_1.M\lambda_1}-\left(\frac{\mathfrak{R}'}{\overline{M\pi}^3}+\frac{Q'}{\overline{Mp}^3}\right)\frac{1}{2\sin\alpha} +\left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\overline{M\pi_1}^3}+\frac{Q'_1}{\overline{Mp_1}^3}\right)\frac{1}{2\sin\alpha_1},$$

qui dépend des rayons de courbure des courbes données et de leurs développées.

On transforme de la même manière l'équation (8').

Il se présente ici une vérification facile des équations (8')

Fig. 43.

et (9'). En effet, on passe de la première à la seconde en changeant ρ, ρ_1, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, α, α_1, en r, r_1, Q, Q_1, a, a_1, et réciproquement, et enfin P en R. En opérant ainsi, on tombe sur une équation qui ne diffère pas de l'équation (9'), pourvu que l'on ait égard aux relations (1).

Il y aurait aussi une autre manière d'opérer, consistant à faire usage de l'une des équations (2) pour calculer l'un des rayons de courbure P ou R lorsque l'autre est connu. Et il est facile de voir, par ces deux équations, que la proportion harmonique donne alors la construction du rayon de courbure inconnu au moyen du rayon de courbure déjà trouvé.

116. *Des mouvements inverses.* — *Définition.* — Si deux courbes C', C, situées dans deux plans P' et P, se meuvent successivement de telle sorte que, dans le premier cas, la première entraînant son plan roule sur la courbe C, supposée fixe, et que, dans le second cas, la courbe C entraînant son plan se meuve sur la courbe C' supposée fixe, les deux mouvements successifs des plans P' et P seront appelés *mouvements inverses* l'un de l'autre.

Dans ces deux mouvements, les courbes enveloppes situées dans le plan fixe et les courbes enveloppes situées dans le plan mobile ayant des positions relatives identiques, on obtient les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si dans le premier de ces mouvements la courbe v' située dans le plan* P′ *a pour enveloppe la courbe v située dans le plan* P, *dans le second mouvement la courbe v située dans le plan* P *aura pour enveloppe la courbe v' située dans le plan* P′.

En effet, les positions relatives de la figure située dans le plan fixe et de la figure génératrice située dans le plan mobile seront successivement les mêmes lorsque l'une des deux figures restera immobile, ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Les équations (1) du n° 103 relatives à ces deux mouvements seront successivement les mêmes.

Théorème II. — *Si le mouvement d'un plan* P′ *est déterminé par la condition que deux courbes données v', v'_1, situées dans le plan* P′, *enveloppent deux courbes v, v_1, aussi données et situées dans le plan* P, *le mouvement du plan* P, *réglé par la condition que les deux courbes v, v_1, situées dans le plan* P, *enveloppent les deux courbes v', v'_1, situées dans le plan* P′, *sera réciproque du premier mouvement, c'est-à-dire que dans le premier cas la courbe* C′ *roulera sur la courbe* C, *et dans le second cas la courbe* C *roulera sur la courbe* C′.

Théorème III. — *Les mêmes choses étant données que dans le théorème II, si l'on considère dans le premier mouvement la courbe v'_2 située dans le plan mobile et la courbe enveloppe v_2 située dans le plan fixe, dans le second mouvement, v'_2 sera l'enveloppe de la courbe v_2.*

§ II. — Applications.

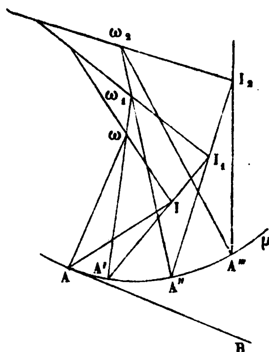
Les principes généraux que nous venons d'établir sont d'une grande fécondité; ils permettent de résoudre sans difficulté, soit géométriquement, soit analytiquement, les pro-

blèmes les plus variés sur le mouvement d'un plan, comme cela deviendra évident dans les applications qui suivent.

117. PROBLÈME V. — *Une droite de longueur donnée glisse sur une courbe donnée en restant tangente en une de ses extrémités à cette courbe, et en entraînant avec elle le plan qui la contient; mouvement de ce plan.*

1° Considérons (*fig.* 44) la droite AB dans une de ses posi-

Fig. 44.



tions tangente à la courbe μ. Puisque cette droite est tangente en son extrémité A à la courbe, elle a deux points communs avec cette courbe en ce point. Or, si par ces deux points on élève des normales à la courbe μ, on voit que le centre instantané de rotation ω sera le point de concours de ces deux normales, c'est-à-dire le centre de courbure de la courbe μ. Donc *le lieu des centres instantanés dans le plan fixe n'est autre chose que la développée de la courbe* μ.

Pendant le mouvement de AB, le lieu des centres ω sur le plan mobile ne sera autre chose que la perpendiculaire élevée à l'extrémité de AB en A.

Donc *le mouvement du plan mobile est le même que celui qui serait produit par le roulement de* AC *perpendiculaire en* A *à* AB *sur la développée de* μ, AC *étant solidairement liée avec* AB.

2° Tout point de la droite AC décrit une parallèle de la courbe μ.

3° Tout point D de la droite AB décrit la courbe que nous avons étudiée n° 64. On retrouvera comme corollaire du n° 101 la construction de la normale et du rayon de courbure de cette courbe. La normale sera la droite qui joint le centre de rotation ω avec D. Le rayon de courbure est donné par la formule (5) du n° 101 et par la formule

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right)\sin\alpha = \frac{1}{R} = \frac{2}{M},$$

dans laquelle R est le rayon de courbure de la développée de la courbe μ. Enfin, si l'on appelle θ l'angle décrit par la droite AD entre deux positions extrêmes, l'aire balayée par cette droite l sera $\frac{2\pi}{360}\frac{l^2}{2}\theta$, c'est-à-dire celle du secteur circulaire ayant $\frac{2\pi l}{360}\theta$ pour arc, l pour rayon.

4° Toute droite parallèle à AB a pour enveloppe une ligne parallèle à la ligne μ.

5° Toute droite AI menée par le point A, formant un angle θ constant avec AB, a pour enveloppe une développée oblique de la courbe (μ) sous l'angle θ, puisque tous les triangles tels que AIω sont semblables (I étant un point de l'enveloppe).

6° La développée de la développée oblique II_1I_2 est la développée oblique sous l'angle constant θ de la développée de la ligne μ; cela résulte de notre construction et vérifie le corollaire II du n° 54.

7° Pour connaître la courbe engendrée par un point quelconque B_1 du plan mobile, abaissez de ce point B_1A_1 perpendiculaire sur la droite AC; le point B_1 engendrera la courbe étudiée n° 64 par rapport à la parallèle à la courbe μ engendrée par le point A.

8° Toute droite menée par le point A_1 parallèlement à AI aura pour enveloppe une ligne parallèle de celle qu'enveloppe AI.

9° Tout cercle ayant son centre en C, A ou B aura pour en-

veloppe une courbe parallèle de celle engendrée par C, ou A, ou B.

10° Quelle que soit la ligne de longueur donnée située dans le plan mobile, il est aisé de déterminer les courbes engendrées par ses deux extrémités.

11° Quel que soit l'angle situé dans le plan mobile, on pourra aussi déterminer les courbes enveloppes des deux côtés de l'angle, ainsi que la courbe décrite par le sommet.

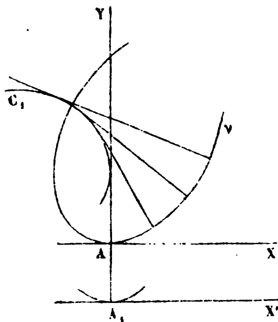
12° On peut donc produire d'une infinité de manières différentes le mouvement du plan mobile, tel qu'il est produit par les données de la question.

13° Il n'y a que deux courbes d'espèces différentes décrites par les points du plan mobile : ce sont la courbe μ et ses parallèles, ou bien celles de la catégorie n° 64, et il n'y a que trois espèces de courbes enveloppes des droites du même plan mobile : ce sont la courbe (μ) et ses parallèles, et leurs développées obliques, et les parallèles de la développée de la courbe μ (elles enveloppent les parallèles de la droite AB).

14° Dans le roulement de la droite AB sur la développée de la courbe μ, $\frac{da}{ds}$ se trouve déterminé dans chaque cas particulier que nous venons d'étudier.

118. Problème VI. — *Une courbe* ν (*fig.* 45) *entraîne avec elle*

Fig. 45.



son plan et reste constamment tangente à une droite fixe AX *en un de ses points* A; *nature du mouvement de ce plan.*

Si l'on remarque que, dans le problème actuel, le mouvement est inverse du mouvement déterminé par les conditions du problème précédent, on obtient les propositions suivantes :

1° Le lieu des positions des centres instantanés de rotation est, sur le plan fixe, la normale AY à la droite AX au point A et, sur le plan mobile, la développée de la courbe.

2° Le mouvement du plan mobile est produit par le roulement de la développée C_1 de la courbe sur la droite AY normale au point A à la droite AX.

3° Toute courbe parallèle à la courbe ν restera constamment tangente à une droite A_1X' parallèle à la droite AX en un point A_1, intersection de la normale au point A avec la droite A_1X'.

4° Tout point du plan mobile engendrera une roulette obtenue par le roulement de la courbe C_1 sur une droite fixe AY. (Ce problème a été résolu au n° 109.)

5° Toute droite située dans le plan mobile enveloppera la courbe qui a été étudiée au n° 108.

6° Deux points du plan mobile situés sur la courbe ν ou sur une de ses courbes parallèles engendreront des roulettes qui auront un point commun situé sur la droite AY.

7° Deux points M, M' quelconques du plan mobile engendreront des roulettes qui couperont la droite fixe AY en deux points A, A' tels que leur distance sera celle des courbes parallèles à la courbe ν qui passent par les deux points M, M'.

8° Si deux droites L, L_1 sont toutes deux tangentes à la courbe ν ou à une de ses parallèles, les enveloppes de ces deux droites seront tangentes à la droite AX au point A ou à la droite A_1X' au point A_1.

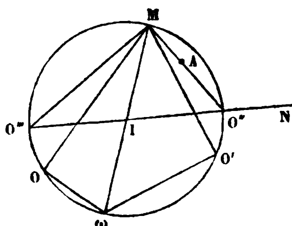
9° Si les deux droites sont quelconques, les enveloppes couperont AY en deux points A, A_1, où leurs tangentes seront perpendiculaires à AY.

10° Le mouvement peut être produit par une courbe ν et une de ses parallèles qui restent constamment tangentes à deux droites parallèles AX, A_1X'.

119. Problème VII. — *Un angle constant (fig. 46) entraînant son plan parallèlement à un plan fixe se meut de telle*

sorte que les deux côtés de cet angle passent par deux points

Fig. 46.



fixes O, O′ *situés dans le plan fixe. Mouvement du plan mobile.*

1° Le sommet M de l'angle constant OMO′ décrit un cercle OMO′ω circonscrit à l'angle et passant par O et O′.

2° Le lieu des centres instantanés sur le plan fixe est le même cercle OMO′ω.

3° Le lieu des centres instantanés dans le plan mobile est le cercle dont le rayon est Mω, dont le centre est situé en M, sommet du triangle OMO′.

4° Le mouvement du plan mobile peut être produit par le roulement du second cercle sur le premier, ce second cercle étant tracé dans le plan mobile dans une de ses positions et entraînant son plan parallèlement au plan fixe.

5° Toute droite MO″ passant par le sommet M de l'angle et située dans le plan mobile enveloppe un point fixe O″ du plan fixe; ce point appartient à la circonférence du cercle OMO′ω.

6° Tout point A du plan mobile différent de M décrit le limaçon de Pascal; pour le voir, il suffit de joindre ce point A avec le point M : la ligne AM passera par le point fixe O″; donc, etc.

7° Tout point situé à une distance de M constante décrira un limaçon de Pascal, constant de forme mais non de position, pourvu que le point se trouve toujours du même côté par rapport à la tangente au cercle I au point M du plan mobile.

8° Toute droite L qui ne passe pas par le sommet M enve-

loppe le cercle qui a pour centre le point qu'enveloppe la parallèle à L menée par le sommet M et pour rayon la distance de ce point à la droite L.

9° Tout cercle tracé dans le plan mobile enveloppe un cercle concentrique du cercle I, ou bien une courbe parallèle du limaçon de Pascal.

Mouvements équivalents.

Un mouvement identique avec celui qui a lieu peut être produit d'une infinité de manières; nous nous contentons de signaler les suivantes :

1° Roulement du cercle, lieu des centres instantanés dans le plan mobile sur le cercle, lieu des centres instantanés sur le plan fixe. Comme le premier cercle a un rayon double du rayon du second et que les concavités ont le même sens, on voit que toutes les courbes engendrées par des points dans le mouvement défini dans le numéro précédent sont des hypocycloïdes allongées ou raccourcies, produites par le roulement d'un cercle sur un autre dont le rayon est la moitié du rayon du cercle mobile.

2° Mouvement d'un angle constant situé dans le plan mobile dont les deux côtés restent tangents à deux cercles situés dans le plan fixe et ayant leurs centres sur le cercle MOO'.

3° Mouvement d'une droite de longueur donnée, située dans le plan mobile, et dont les deux extrémités glissent sur deux limaçons de Pascal obtenus pour un même cercle directeur.

4° Mouvement d'un plan mobile par cette condition qu'une droite située dans ce plan enveloppe un cercle ou un point situés dans le plan fixe, et qu'un point situé dans le plan mobile parcourt un limaçon de Pascal situé dans le plan fixe, etc., ce limaçon étant relatif à un cercle directeur passant par le point situé dans le plan fixe.

120. Problème VIII. — *Un plan se meut parallèlement à un plan fixe par cette condition que deux points* O *et* O' *du plan mobile se trouvent toujours sur les côtés d'un angle* XMY *situé dans le plan fixe; nature du mouvement du plan mobile.*

Le mouvement du plan mobile (*fig.* 46) est inverse de celui qui a été considéré dans le n° 119. D'après cela :

1° Le lieu des centres instantanés dans le plan fixe sera le cercle dont le centre est M et le rayon Mω qui est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère MOωO'.

2° Le lieu des centres instantanés dans le plan mobile sera le cercle circonscrit à ce quadrilatère.

3° Tous les points O'', O''' de la circonférence de ce cercle mobile engendreront des droites concourantes en M.

4° Tout point N du plan mobile décrit une ellipse. En effet, tirez une droite par le point N et le centre I du cercle mobile OωO'M, joignez les intersections O'', O''' de cette droite et du cercle avec le sommet M, le mouvement du plan mobile sera le même que si deux de ses points O'', O''' glissent sur les deux droites rectangulaires MO'', MO''' situées dans le plan fixe. D'après cela, on voit que N décrit une ellipse, dont le centre est M, dont les axes sont dirigés suivant MO'', MO''', et tels que leur somme ou leur différence est constante, suivant que le point N est situé ou non entre les points O'' et O'''.

5° Le point I, centre du cercle mobile, décrit un cercle de rayon MI.

6° Si des points tels que N sont à égale distance du point I, les ellipses décrites seront égales, concentriques; leurs axes auront des directions différentes, mais leur somme ou leur différence sera constante.

7° Toute droite NI passant par le centre I du cercle mobile ωOMO' enveloppe une hypocycloïde dont le cercle directeur est le cercle fixe et dont le rayon est le quart du rayon du cercle fixe. En effet, cette droite est le rayon du cercle ωOMO' qui roule sur le cercle fixe (n° 55).

8° Toute droite L parallèle à la droite NI enveloppe une parallèle de l'hypocycloïde enveloppée par NI (n° 55).

9° Tout cercle situé dans le plan mobile enveloppera une courbe parallèle de l'une des ellipses de la série énoncée (4°) du présent numéro.

Mouvements équivalents.

Un mouvement identique avec celui du plan mobile peut être produit d'une infinité de manières; ainsi, par exemple :

1° Par le mouvement d'une droite de longueur donnée située dans le plan mobile, dont les extrémités s'appuient sur deux ellipses de la série énoncée (4°) dans le numéro présent;

2° Par le mouvement d'un angle constant situé dans le plan mobile dont les deux côtés restent tangents à deux hypocycloïdes de la série énoncée dans le théorème 7° du numéro présent, ou à deux parallèles à ces épicycloïdes;

3° Par le mouvement d'un plan réglé par cette condition qu'une de ses droites enveloppe l'une des épicycloïdes déjà mentionnées ou une de ses parallèles situées dans le plan fixe, et qu'un point du plan mobile décrit une des ellipses de la série indiquée;

4° Par le mouvement réciproque d'un des quatre mouvements indiqués dans le n° 119.

Remarques. — 1° Les réciproques des trois mouvements que nous venons d'indiquer produiront aussi le mouvement du plan mobile considéré dans le n° 119.

2° De l'équivalence des mouvements du plan mobile, il résulte que chacune des courbes décrites par des points fixes ou enveloppées par des droites ont une génératrice multiple, laquelle correspond aux différentes manières d'exprimer le mouvement du point.

3° Si l'on considère deux plans mobiles d'après la loi indiquée, les droites et les points semblablement situés par rapport aux deux cercles roulants donneront lieu à des figures semblables, et ces droites et ces points envelopperont ou décriront des courbes semblables et semblablement placées.

121. Problème IX. — *Une droite* OO′ (*fig.* 47) *s'appuie par une de ses extrémités* O′ *sur une droite fixe* PP′ *et passe par un point fixe* O; *mouvement du plan qu'elle entraîne avec elle parallèlement au plan de la droite et du point fixes.*

1° *Lieu des centres instantanés.* — Il suffit de déterminer le point ω de concours des normales aux droites PP′ et OO′ me-

Fig. 17.

nées par les points O et O′, et de le rapporter à des axes fixes dans le plan fixe ou dans le plan mobile, pour avoir l'équation du lieu, soit dans le plan fixe, soit dans le plan mobile; menons OA perpendiculaire à PP′; soient $OA = a$; Ox, Oy les axes rectilignes menés dans le plan fixe; $O'x'$, $O'y$ ceux menés dans le plan mobile, en représentant $O\omega$ par r_1, $O'\omega$ par ρ, OO′ par r, et en appelant θ et ψ les angles que r et r_1 font avec Ox, ψ_1 l'angle que $\omega O'$ forme avec $O'x'$, on a les équations

$$(1)\qquad \frac{r_1}{r} = \operatorname{tang}\theta,\quad r = \frac{a}{\cos\theta},\quad \rho = \frac{a}{\cos^2\theta};$$

or ψ et θ diffèrent entre eux d'un angle droit : on aura donc les équations

$$(2)\qquad r_1 = -\frac{a\cos\psi}{\sin^2\psi},\quad \rho = \frac{a}{\sin^2\psi_1}$$

pour représenter le lieu des centres instantanés dans le plan fixe et dans le plan mobile. Ces équations dans le système cartésien sont

$$(2')\qquad y^2 + ax = 0,\quad y^4 = a^2(x^2 + y^2).$$

La première représente une parabole tangente en son sommet à l'axe des y et symétrique par rapport à l'axe des x, et la seconde une parabole bicarrée.

2° *Courbe engendrée par un point.* — Un point quelconque de OO′ engendre une conchoïde, excepté le point O′ qui engendre la droite PP′.

3° *Courbe engendrée par un point quelconque* M *du plan mobile.* — Soient x', y' les coordonnées rectilignes de ce point par rapport aux axes O′x', O′y' situés dans le plan mobile; et X, Y ses coordonnées par rapport aux axes Ox, Oy situés dans le plan fixe; on a, d'après le principe des projections, pour représenter les équations du point dans le plan fixe,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= a + x'\sin\theta - y'\cos\theta,\\ Y &= a\operatorname{tang}\theta - x'\cos\theta - y'\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine θ entre ces deux équations, qu'on représente par l la distance du point M au point O′ et par i l'angle qu'elle fait avec l'axe O′x', on aura d'abord les deux relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} l\sin\theta &= (X-a)\cos i \pm \sin i\sqrt{l^2-(X-a)^2},\\ l\cos\theta &= -(X-a)\sin i \pm \cos i\sqrt{l^2-(X-a)^2},\end{aligned}\right.$$

et ensuite l'équation

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} Y = &-a\,\frac{(X-a)\cos i \pm \sin i\sqrt{l^2-(X-a)^2}}{(X-a)\sin i \mp \cos i\sqrt{l^2-(X-a)^2}}\\ &\mp\sqrt{l^2-(X-a)^2},\end{aligned}\right.$$

qui est l'équation du lieu entre les coordonnées X et Y.

4° *Courbe engendrée par les traces d'un point du plan fixe sur le plan mobile.* — On trouve les deux équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= X\sin\theta - Y\cos\theta,\\ y' &= \frac{a}{\cos\theta} - X\cos\theta - Y\sin\theta;\end{aligned}\right.$$

conséquemment, en représentant par L la distance du point M

au point O, et par I l'angle qu'elle forme avec Ox, on aura

$$(7)\qquad \begin{cases} L\sin\theta = \quad x'\cos I \pm \sin I\sqrt{L^2 - x'^2}, \\ L\cos\theta = -x'\sin I \pm \cos I\sqrt{L^2 - x'^2}; \end{cases}$$

donc l'équation du lieu sera

$$(8)\qquad y' - \frac{aL}{-x'\sin I \pm \cos I\sqrt{L^2 - x'^2}} \mp \sqrt{L^2 - x'^2}.$$

Si $L = a$ et $I = 0$, on a

$$(8')\qquad y' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x'^2}} - \sqrt{a^2 - x'^2} = \frac{x'^2}{\sqrt{a^2 - x'^2}}.$$

5° *Enveloppe d'une droite située dans le plan mobile.* — 1° Si la droite est parallèle à OO′, elle enveloppe un cercle ayant O pour centre;

2° Si, sans être parallèle à OO′, elle passe par le point O′, elle enveloppe une parabole;

3° Si elle est quelconque, elle enveloppe la courbe parallèle de la parabole qui est l'enveloppe de la droite parallèle à la droite dont il s'agit, cette droite parallèle étant menée par le point O′.

6° *Enveloppe d'une droite menée dans le plan fixe.* — Dans le mouvement inverse, c'est le plan du point O et de la droite PP′ qui devient mobile, de telle sorte que PP′ passe par le point O′ et que l'extrémité O de OA s'appuie sur la droite OO′. De là on déduit :

1° Une droite parallèle à PP′ enveloppe un cercle dont le centre est en O′;

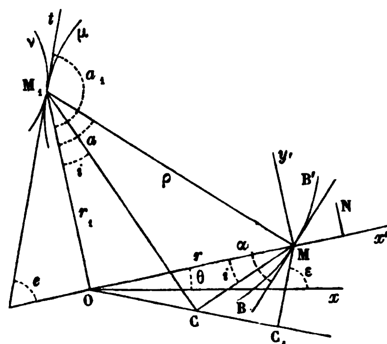
2° Si elle passe par le point O, c'est la courbe enveloppe d'un côté d'un angle invariable dont un côté indéfini passe par un point fixe O′, tandis que l'autre côté fini s'appuie par son extrémité sur une droite OO′ donnée.

3° Toute autre droite enveloppe une parallèle de la courbe précédemment indiquée.

122. Problème X. — *Une droite* (*fig.* 48) *a son extrémité* M

située sur une courbe donnée BB′ *et elle passe par un point fixe* O; *cette droite entraîne avec elle un plan qui lui est invariablement lié et parallèlement au plan de la courbe* BB′, *lieu des centres instantanés* M_1 *de rotation de ce plan mobile.*

Fig. 48.



Équation du lieu. — Soit $r = f(\theta)$ l'équation polaire de la courbe BB′ par rapport au point O comme pôle et à une droite fixe, a l'angle du rayon vecteur avec la tangente au point M, ε l'angle de cette tangente avec l'axe fixe. Si l'on représente par les mêmes lettres affectées de l'indice 1 les quantités analogues dans la courbe cherchée rapportée au même pôle et au même axe, et que par les points O et M on élève des normales, l'une à la droite OM et l'autre à la courbe BB′, leur point d'intersection M_1 sera un point du lieu. Soient OM_1 le rayon vecteur représenté par r_1, θ_1 l'angle qu'il fait avec Ox; le triangle OMM_1 donne les relations

$$(1) \qquad \frac{r}{r_1} = \tang a = \frac{r d\theta}{dr}, \quad \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2};$$

donc les équations du lieu cherché seront

$$(1') \qquad r_1 = \frac{dr}{d\theta}, \quad \theta = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Tangente. — Soient R et N, R_1, N_1 les rayons de courbure

et la normale de la courbe BB′ et du lieu; s, s_1 les arcs correspondants de ces courbes, on a

$$(2)\qquad \frac{da}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{1}{N};$$

or, d'après ce qui précède, on a les relations

$$\cot a = \frac{dr}{rd\theta}, \quad \cot a_1 = \frac{\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\frac{dr}{d\theta}}.$$

La différentiation de la première par rapport à s donne, en ayant égard à la seconde, l'expression suivante

$$\frac{da}{as} = \frac{\sin^2 a \cos a}{r}(\cot a - \cot a_1);$$

en égalant les deux valeurs de $\frac{da}{ds}$, on obtient l'équation

$$(3)\qquad (\cot a_1 - \cot a) = \frac{1 - \frac{N}{R}}{\sin a \cos a},$$

qui, écrite sous la forme suivante :

$$\tang a_1 = \frac{R \sin a}{R \cos a + \frac{N - R}{\cos a}},$$

donne une construction géométrique facile de la tangente.

Rayon de courbure. — Écrivons la relation

$$(4)\qquad \frac{da_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{N_1}$$

et différentions l'équation (3). Si l'on remarque que les équations (2) et (4) peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{d \cot a}{ds} = \frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{R}\right), \quad \frac{d \cot a_1}{ds} = \frac{\cos a}{\sin^3 a_1}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{R_1}\right),$$

cette différentiation conduit à l'équation suivante :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos a}{\sin^3 a_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{N_1}\right) \\ &\quad = \frac{1}{\sin^2 a}\frac{1}{R}+\left(\frac{1}{\cos^2 a}-\frac{2}{\sin^2 a}\right)\frac{N}{D^2}-\frac{1}{\cos a \sin a}\frac{NR'}{R^3}, \end{aligned} \right.$$

laquelle fait connaître le rayon de courbure R_1 du lieu des positions successives du centre instantané de rotation dans le plan fixe.

123. Problème XI. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver le lieu des centres instantanés dans le plan mobile* (*fig.* 48).

Équation du lieu. — Elle s'obtient en prenant pour pôle le point M et pour axe polaire la droite MO, situées l'une et l'autre dans le plan mobile; nous représentons le rayon vecteur MM_1 par ρ et l'angle polaire OMM_1 par ψ; le triangle OMM_1 donne les deux relations

$$(1)\qquad \rho^2 = r^2 + r_1^2,\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{r}{r_1};$$

d'après cela, les équations du lieu dans le plan mobile sont

$$(1')\qquad \rho^2 = f[(\theta)]^2 + f'[(\theta)]^2,\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

Tangente. — Considérons le lieu, c'est-à-dire la courbe roulante $M_1\nu$ dans une de ses positions; on a, après avoir posé $a_1 - a = \alpha$, $\psi = \frac{\pi}{2} - a$, la tangente au point M_1 du lieu en menant une ligne M_1t formant un angle α avec le rayon vecteur MM_1; or les angles a et a_1 sont connus : l'un est un des éléments de la question et l'autre a été déterminé dans le problème précédent.

Lorsque la courbe $M_1\nu$ roule entraînant son plan, le point O est tel, que, si dans le plan mobile on mène M_1O formant l'angle a avec M_1M, M_1O passera par un point fixe, le point M décrira la courbe BB'; le point O dans le point fixe, pendant le

roulement de la courbe $M_1\nu$ sur la courbe $M_1\mu$, est tel, que de ce point on verra la distance du point M au point M_1 sous un angle droit. Donc, si dans le plan mobile on décrivait une circonférence sur MM_1 comme diamètre, dans ses différentes positions, ce cercle passerait par le point O.

Rayon de courbure. — Soit $\mathcal{R}$ ce rayon, on a, d'après le n° 101,

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\mathcal{R}}\right)=\sin\alpha\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{R-\rho}\right),$$

et, comme R_1 est connu, le théorème II du n° 102 donne la construction géométrique de $\mathcal{R}$, dont on aurait l'expression analytique en substituant dans l'équation précédente la valeur de $\frac{1}{R_1}$ tirée de l'équation (5) du numéro précédent.

124. Problème XII. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème X (fig. 48); courbe engendrée par un point du plan mobile, courbe enveloppe d'une droite située dans le plan mobile.*

1° Soient x', y' les coordonnées du point N situé dans le plan mobile, par rapport à deux axes rectangulaires menés par le point M, l'un suivant OM et l'autre normalement à OM; soient X et Y les coordonnées du même point par rapport aux axes rectangulaires Ox et Oy menés par le point O, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} X=(r+x')\cos\theta-y'\sin\theta,\\ Y=(r+x')\sin\theta+y'\cos\theta;\end{cases}$$

les seconds membres sont des fonctions de θ : ce sont donc les équations du lieu décrit par le point N dans le plan fixe.

2° Supposons que la droite MC passe par le point M et forme l'angle i avec MO. Si du point M_1 on abaisse une perpendiculaire sur MC, le pied C de cette perpendiculaire sera un point du lieu. Soient $OC=\rho_1$ et l'angle $COx=\psi_2$, le triangle OCM donne les deux équations

$$(2)\qquad \frac{\rho_1}{\sin i}=\frac{r}{\sin(i+\theta-\psi_2)}=\frac{\rho\sin(a-i)}{\sin(\theta-\psi_2)};$$

or la seconde donne une relation entre ψ_2 et θ, puisqu'elle devient, par le développement des lignes trigonométriques,

$$(3)\qquad \frac{r}{\rho}=\frac{\sin(i+\theta-\psi_2)}{\sin(\theta-\psi_2)}\left(\frac{rd\theta}{ds}\cos i-\frac{dr}{ds}\sin i\right);$$

on a donc, par suite des équations (2), ρ_1 et ψ_2 en fonction de θ, c'est-à-dire les équations de l'enveloppe.

Si la droite ne passe pas par le point M, elle enveloppera une courbe parallèle de la courbe enveloppe de la droite passant par le point M et parallèle à celle dont il s'agit; la question est donc ramenée à la précédente.

125. Problème XIII. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème X, moins la courbe directrice* BB', *le rapport des normales* r_1 *et* ρ *qui déterminent le centre instantané de rotation est constant et égal à* $\sin\psi$; *mouvement du plan mobile.*

1° Le triangle OMM_1 restant rectangle et semblable au triangle correspondant à une position déterminée de la figure, on voit que l'on a l'équation différentielle de la courbe directrice

$$(1)\qquad \frac{dr}{rd\theta}=\operatorname{tang}\psi=m.$$

L'équation de la courbe en termes finis sera donc, k étant la constante d'intégration,

$$(2)\qquad r=ke^{m\theta}.$$

2° Le lieu des centres instantanés dans le plan fixe est aussi une spirale logarithmique dont l'équation est

$$(3)\qquad r_1=kme^{\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3° Le lieu des centres instantanés dans le plan mobile est une droite qui passe par le point M et forme avec OM un angle constant ψ,

4° Le lieu des positions successives d'un point situé dans

le plan mobile est une courbe dont les équations sont

$$(4)\qquad \begin{cases} X = (ke^{m\theta} + x')\cos\theta - y'\sin\theta, \\ Y = (ke^{m\theta} + x')\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

qui représentent une espèce de conchoïde spirale, laquelle est la courbe parallèle de la spirale elle-même.

5° L'enveloppe d'une droite située dans le plan mobile passant par le point M est une spirale logarithmique. En effet le triangle OCM reste toujours semblable à lui-même; donc OC est proportionnel à r. L'équation de cette courbe sera, l et C étant des constantes (n° 124),

$$(5)\qquad \rho_1 = Ce^{m(l-\varphi)}.$$

Si la droite ne passe pas par le point M, son enveloppe sera la parallèle de la spirale logarithmique dont les équations seront de même forme que les équations (4).

On arrive ainsi à ce théorème :

Si une droite roule sans glissement sur une spirale, tout point ou toute droite situés dans le plan de cette droite engendre ou enveloppe une spirale logarithmique ou une parallèle de la spirale.

6° Le lieu des traces qu'un point situé dans le plan fixe détermine sur le plan mobile a pour équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = X\cos\theta + Y\sin\theta - ke^{m\theta}, \\ y' = Y\cos\theta - X\sin\theta. \end{cases}$$

7° L'enveloppe des positions qu'une droite OC_1 située dans le plan fixe détermine successivement sur le plan mobile, lorsque cette droite passe par le point O, s'obtient facilement. Soient ι et ψ_1 les coordonnées polaires d'un point de l'enveloppe par rapport au point M et à l'axe MO, et I l'angle que la droite OC_1 fait avec l'axe Ox, on trouve

$$(7)\qquad \iota = r\sin(I+\theta),\quad I+\theta+\psi_1 = \frac{\pi}{2};$$

l'équation du lieu sera donc

$$(8)\qquad \iota = ke^{m\left(\frac{\pi}{2}-1-\psi_1\right)}\cos\psi_1.$$

Si la droite est parallèle à OC_1 et à une distance p du point O, on trouvera, pour l'équation de l'enveloppe,

$$(9)\qquad \iota = p + k\cos\psi_1 e^{m\left(\frac{\pi}{2}-1-\psi_1\right)}.$$

126. Problème XIV. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème X, moins la courbe directrice* BB′, *déterminer le mouvement du plan mobile par la condition que le complément de l'angle des normales qui déterminent le centre instantané soit proportionnel à l'angle polaire de la courbe* BB′ (*fig.* 48).

La condition du problème est

$$(1)\qquad \psi = m\theta;$$

conséquemment l'équation différentielle de la directrice est

$$(2)\qquad \frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{\sin m\theta}{\cos m\theta};$$

on aura donc, a étant la constante d'intégration, les trois équations

$$(3)\qquad \begin{cases} r = a\cos^{-\frac{1}{m}} m\theta, \\ r_1 = a\,\mathrm{tang}\,m\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos^{-\frac{1}{m}} m\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right), \\ \rho = a\cos^{-\left(1+\frac{1}{m}\right)}\psi, \end{cases}$$

pour représenter : la première la courbe directrice; la seconde le lieu des centres instantanés dans le plan fixe; la troisième le lieu des centres instantanés dans le plan mobile.

Cas particuliers. — 1° Si $m = -1$, on trouve

$$r = a\cos\theta,\quad r_1 = a\cos\theta_1,\quad \rho = a;$$

la première est un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ qui passe par le point O, la seconde est ce même cercle, et la troisième est un cercle qui a son centre en M et un rayon double. Ainsi le mouvement du plan mobile est le mouvement hypocycloïdal qui est déterminé par le roulement d'un cercle sur un cercle de rayon double du rayon du premier cercle.

2° Si $m = 1$, on trouve le mouvement considéré dans le n° 121.

3° Si $m = -2$, on trouve les trois équations suivantes :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - x^2),$$
$$(x^2 + y^2)^2(y^2 - x^2) = 4a^2y^2x^2,$$
$$x^2(x^2 + y^2) = a^4;$$

la première est la lemniscate et la dernière la parabole bicarrée.

4° Si $m = 2$, on obtient le système des trois équations suivantes, dont la première représente une hyperbole équilatère :

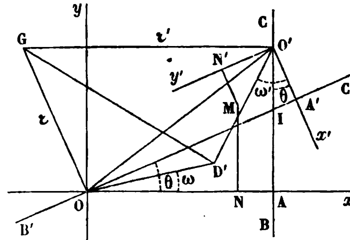
$$x^2 - y^2 = a^2,$$
$$(y^2 - x^2)^3 = 4a^2x^2y^2,$$
$$x^6 = a^4(x^2 + y^2).$$

Sans poursuivre plus loin cette discussion, on voit que la courbe polaire, représentée par la première des équations (3), que nous avons déjà étudiée (n° 109) comme courbe roulante et qui a produit des roulettes d'un grand intérêt, engendre des courbes non moins intéressantes lorsqu'on l'étudie comme courbe directrice du mouvement d'un plan, par cette condition qu'une de ses droites passe par un point fixe et qu'une de ses extrémités s'appuie sur cette courbe. MM. Serret et Bonnet avaient déjà signalé d'autres propriétés remarquables de cette courbe.

127. Problème XV. — *Une droite* (*fig.* 49) B′C′ *et un point* O′ *situés dans un plan entraînent ce plan parallèlement à un plan fixe qui contient une droite* BC *et un point* O. *Ce mouvement est déterminé par cette condition que la droite* B′C′ *passe par*

le point O, *tandis que le point* O′ *reste sur la droite* BC; *courbe décrite dans le plan fixe par un point* M *situé dans*

Fig. 49.



le plan mobile; lieu des positions dans le plan mobile d'un point M *situé dans le plan fixe.*

Soient a et a_1 les distances du point O à la droite BC et du point O′ à la droite B′C′; θ l'angle que B′C′ fait avec a; soient OO′ représenté par r; x, y les coordonnées du point M par rapport aux axes fixes; x', y' les coordonnées du même point par rapport aux axes mobiles O′x', O′y'. Si l'on projette la ligne brisée ONMN′O′A sur l'axe des x et ensuite sur l'axe des y, on a les deux équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a - y'\cos\theta + x'\sin\theta,\\ y &= \frac{a\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{a_1}{\cos\theta} - y'\sin\theta - x'\cos\theta; \end{aligned}\right.$$

on déduit de ces deux équations les deux suivantes :

$$(1')\qquad \left\{\begin{aligned} y' &= \frac{a}{\cos\theta} + \frac{a_1\sin\theta}{\cos\theta} - x\cos\theta - y\sin\theta,\\ x' &= a_1 + x\sin\theta - y\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Si l'on appelle l', l les distances du point M aux points O′ et O, et i', i les angles qu'elles font avec les axes O′x', Ox, on déduit de la première des équations (1) les deux suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} l'\sin\theta &= \quad (x-a)\cos i' \pm \sin i'\sqrt{l'^2 - (x-a)^2},\\ l'\cos\theta &= -(x-a)\sin i' \pm \cos i'\sqrt{l'^2 - (x-a)^2}, \end{aligned}\right.$$

et, en portant ces valeurs dans la seconde des équations (1), on trouve l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} y = & \frac{a_1 l' + a(x-a)\cos i' \pm a \sin i' \sqrt{l'^2 - (x-a)^2}}{-(x-a)\sin i' \pm \sin i' \sqrt{l'^2 - (x-a)^2}} \\ & \pm \sqrt{l'^2 - (x-a)^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est le lieu des points M dans le plan fixe. Elle est du genre des conchoïdes.

De même, si l'on élimine θ entre les deux équations (1'), on trouvera une équation analogue à la précédente et que l'on obtient en changeant dans celle-ci y et x en y', x'; a, a_1, l', i' en a_1, a, l, i. Cette équation n'est autre que l'équation (3), dans laquelle y et x sont regardés comme constants et $l'\cos i'$, $l'\sin i'$ seraient les deux variables x' et y'.

128. Problème XVI. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, et une droite étant située dans le plan mobile, trouver la podaire de l'enveloppe de cette droite dans le plan fixe par rapport au point* O; *et si la droite est donnée dans le plan fixe, trouver la podaire de l'enveloppe de cette droite dans le plan mobile par rapport au point* O'.

Équation de la podaire. — Soient PP_1 (*fig.* 50) cette droite,

Fig. 50.

ρ et ρ_1 ses distances aux points O et O'; ψ et ψ_1 les angles qu'elles font avec les axes Ox, $O'x'$. Si on projette le péri-

mètre $OPP_1O'A$ sur la direction de OP, on trouve

$$(1)\qquad \rho+\rho_1=\frac{a\sin\psi_1+a_1\sin\psi}{\cos\theta};$$

or on a

$$\theta=\psi+\psi_1-\frac{\pi}{2},$$

conséquemment

$$(1')\qquad \rho+\rho_1=\frac{a\sin\psi_1+a_1\sin\psi}{\sin(\psi+\psi_1)}.$$

Cette équation, si l'on regarde ρ_1 et ψ_1 comme constants, et ρ et ψ comme variables, est l'équation polaire de la podaire située dans le plan fixe, de la droite située dans le plan mobile, par rapport au point O; et si l'on regarde ρ et ψ comme constants, et ρ_1 et ψ_1 comme variables, elle est l'équation de la podaire de l'enveloppe dans le plan mobile, d'une droite située dans le plan fixe, par rapport à O'. Cette équation en coordonnées rectangles est

$$(2)\qquad [yx_1+(x-a)y_1]^2(x^2+y^2)=[y_1x+(x_1-a_1)y]^2(x_1^2+y_1^2),$$

qui représente une courbe du quatrième degré.

Si l'on appelle p et p_1 les distances d'un point de la courbe aux droites,

$$(\mathrm{D})\qquad y_1x+(x_1-a_1)y=0,$$

$$(\mathrm{D}_1)\qquad x_1y+y_1(x-a)=0,$$

l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho=\sqrt{y_1^2+(x_1-a_1)^2}\,\frac{p}{p_1}=\mathrm{P_1A'}\,\frac{p}{p_1}.$$

Ainsi la distance d'un point de la courbe au point O est proportionnelle au rapport des distances du même point aux deux droites D et D_1, la première passant par le point O et la seconde par le point A, et telles que le rapport des tangentes des angles qu'elles forment avec l'axe Ox est $\frac{x_1}{x_1-a_1}=-\frac{O'Q_1}{Q_1A'}$, c'est-

à-dire ne dépend que de la projection Q_1 du point P_1 sur l'axe des x' dans le plan mobile.

129. Problème XVII. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver le lieu des centres instantanés dans le plan fixe et dans le plan mobile (fig. 49).*

L'équation de la droite BC par rapport au point O comme pôle et à l'axe Ox, et l'équation de la droite B'C' par rapport au point O' comme pôle et à l'axe $O'x'$ donnent

$$(1)\qquad OI = \frac{a}{\cos\theta}, \quad O'I = \frac{a_1}{\cos\theta}.$$

Soient ι et φ les coordonnées du point G par rapport au premier système, ι', φ' les coordonnées du même point dans le second système, on a, en projetant OG sur BC, les deux équations

$$\iota\cos\theta = \frac{a\sin\theta + a_1}{\cos\theta}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

d'où on déduit l'équation

$$(2)\qquad \iota = \frac{a_1 - a\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

qui est l'équation du lieu des centres instantanés dans le plan fixe. Dans le système cartésien, on obtient

$$(2')\qquad (y^2 + ax)^2 = a_1^2(x^2 + y^2).$$

On trouvera pour équations du lieu des centres instantanés dans le plan mobile dans le système polaire, en remarquant que φ' égale φ, l'équation

$$(3)\qquad \iota' = \frac{a - a_1\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

et, dans le système cartésien, l'équation

$$(3')\qquad (y'^2 + a_1x')^2 = a^2(x'^2 + y'^2),$$

qui représentent la même courbe que l'équation (2'), comme

cela devait être, puisque par la nature du problème le mouvement direct du plan mobile par rapport au plan fixe, et le mouvement inverse de ce second plan par rapport au premier sont identiques d'espèce et ne peuvent différer que par les paramètres a, a_1.

Si l'on construit les deux courbes (2) et (3), la première dans le plan fixe et la seconde dans le plan mobile, et qu'on les place d'après une position particulière de la figure, ces deux courbes seront tangentes, et, en faisant rouler la seconde sur la première, on obtiendra le même mouvement que celui qui est produit par les conditions du problème.

L'équation

$$(4) \qquad y^2 + ax = 0$$

représente une parabole tangente en son sommet à l'axe des y, symétrique par rapport à l'axe des x, et placée du côté de la partie négative de cet axe. Donc l'équation (2′) représente un lieu qui jouit de cette propriété que la distance d'un de ses points à un point fixe O est dans un rapport constant au rectangle des segments des sécantes menées de ce point à la parabole (4) dans une direction constante.

Problème XVIII. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver l'enveloppe d'une droite située dans le plan mobile* (*fig.* 49).

Soit O′D′ cette droite passant par le point O′ et formant l'angle ω_1 avec l'axe $O'x'$; du point G on abaisse une perpendiculaire GD′ sur cette droite; soient x et y les coordonnées du point D′ par rapport aux axes Ox, Oy; si l'on projette OD′O′ successivement sur Ox et sur Oy, on a les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a - v' \sin^2(\omega_1 - \theta), \\ y = \dfrac{a_1 + a \sin\theta}{\cos\theta} - v' \sin(\omega_1 - \theta)\cos(\omega_1 - \theta), \\ v' = \dfrac{a + a_1 \sin\theta}{\cos\theta}, \end{cases}$$

qui sont les équations du lieu.

De même, si OD′ est une droite passant par le point O et formant un angle ω fixe avec l'axe des x, et qu'on cherche l'enveloppe de cette droite dans le plan mobile, on trouvera les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= a_1 - \iota \sin^2(\omega - \theta),\\ y' &= \frac{a + a_1 \sin\theta}{\cos\theta} - \iota \sin(\omega - \theta)\cos(\omega - \theta),\\ \iota &= \frac{a_1 + a \sin\theta}{\cos\theta}. \end{aligned}\right.$$

Si la droite située dans le plan mobile était parallèle à O′D′ et située à une distance p' de cette droite, les équations de l'enveloppe dans le plan fixe seraient

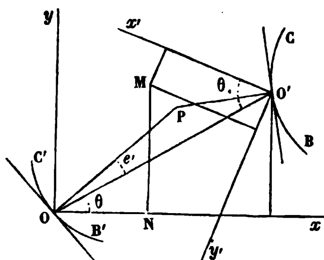
$$x + p'\cos(\omega_1 - \theta) = a - \iota' \sin^2(\omega_1 - \theta),$$

$$y - p'\sin(\omega_1 - \theta) = \frac{a_1 + a \sin\theta}{\cos\theta} - \iota' \sin(\omega_1 - \theta)\cos(\omega_1 - \theta),$$

$$\iota' = \frac{a + a_1 \sin\theta}{\cos\theta}.$$

130. Problème XIX. — *Une courbe* B′C′ *et un point* O′ (*fig.* 51) *situés dans un même plan entraînent ce plan parallèlement à*

Fig. 51.



un plan fixe qui contient une courbe BC *et un point* O; *ce mouvement est de plus assujetti à cette condition que la courbe* B′C′ *passe par le point* O *et que le point* O′ *soit situé*

sur la courbe BC. *Mouvement d'un point* M *situé dans le plan mobile.*

Soit la courbe BC rapportée à deux axes rectangulaires situés dans le plan fixe, Ox, Oy passant par le point O, et $r=f(\theta)$ l'équation polaire de cette courbe par rapport à O et à l'axe des x, Ox. Soit la courbe B'C' rapportée à deux droites $O'x'$, $O'y'$ rectangulaires situées dans le plan mobile, et soit $r_1=f_1(\theta_1)$ son équation polaire par rapport à O' et à l'axe $O'x'$. Soient x', y' les coordonnées de M par rapport aux axes mobiles, et X, Y les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes, on a les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X = r\cos\theta - x'\cos(\theta_1-\theta) - y'\sin(\theta_1-\theta), \\ Y = r\sin\theta + x'\sin(\theta_1-\theta) - y'\cos(\theta_1-\theta); \end{cases}$$

or, puisque les deux rayons vecteurs r et r_1 sont les mêmes, on a l'équation

$$(2)\qquad f(\theta)=f_1(\theta_1),$$

portant dans les équations (1) la valeur de θ_1 en fonction de θ tirée de cette dernière équation; les équations (1) représenteront le lieu des positions du point M sur le plan fixe.

On déduit de ces relations les équations suivantes :

$$(1')\qquad \begin{cases} x' = r_1\cos\theta_1 + Y\sin(\theta_1-\theta) - X\cos(\theta_1-\theta), \\ y' = r_1\sin\theta_1 - Y\cos(\theta_1-\theta) - X\sin(\theta_1-\theta); \end{cases}$$

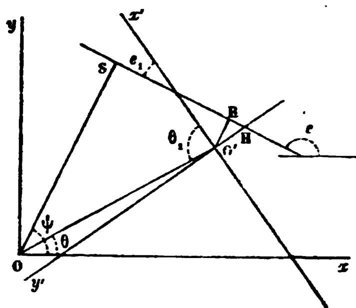
et si l'on exprime θ en fonction de θ_1 au moyen de l'équation (2), on aura les équations du lieu des positions dans le plan mobile d'un point M situé dans le plan fixe.

Si l'on élimine θ, θ_1 entre les équations (1) et l'équation (2), on aura une relation entre X, Y, x', y', et cette équation aura cela de remarquable que, suivant qu'on y considère x', y' comme constantes et X et Y comme variables, ou bien ces dernières comme constantes et les premières comme variables, on aura l'équation cartésienne du lieu dans le plan fixe ou dans le plan mobile.

Podaire de l'enveloppe d'une droite RS *située dans le plan*

mobile par rapport au point O situé dans le plan fixe. — Soit (*fig.* 52) RS situé dans le plan mobile; si des points O et O′ on

Fig. 52.



abaisse des perpendiculaires ρ et ρ_1 sur cette droite, et qu'on représente par e et e_1, ψ et ψ_1 les angles que cette droite et la direction des perpendiculaires font avec les axes Ox, Ox', on aura les deux relations linéaires

$$(3)\qquad \rho - \rho_1 = r\cos(\psi - \theta) = r\cos(\psi_1 - \theta_1)$$

et les deux relations angulaires

$$(4)\qquad \theta_1 - \theta = \frac{\pi}{2} + e_1 - \psi = \frac{3\pi}{2} - e + \psi_1.$$

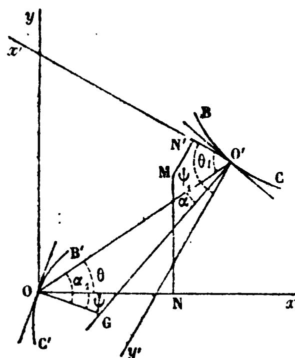
Donc, par suite de l'équation (3), θ est une fonction de ψ et de e_1, et θ_1 une fonction de ψ_1 et de e. De là résulte que la première des équations (3) donne la valeur du rayon vecteur ρ en fonction de ψ et des deux constantes e_1 et ρ_1, tandis que la seconde donne la valeur du rayon vecteur ρ_1 en fonction de ψ_1 et des deux constantes e et ρ. La première est donc l'équation de la podaire dans le plan fixe, d'une droite située dans le plan mobile, par rapport au point O, et la seconde est l'équation de la podaire dans le plan mobile, d'une droite située dans le plan fixe, par rapport au point O′.

131. Problème XX. — *Les mêmes choses étant données que*

dans le problème précédent, trouver le lieu des centres instantanés dans le plan fixe et dans le plan mobile.

Soient OG, O′G (*fig.* 53) les deux normales aux courbes, représentées par ρ et ρ_1; soient ψ et ψ_1 les angles qu'elles

Fig. 53.



font, la première avec l'axe Ox et la seconde avec l'axe $O'x'$; soient α_1, α les angles que ces normales font avec la droite OO′; le triangle OO′G donne les relations

$$(1)\qquad \frac{OO'}{\sin(\alpha+\alpha_1)}=\frac{OG}{\sin\alpha}=\frac{O'G}{\sin\alpha_1}.$$

Si l'on remarque que l'on a, par suite des équations polaires des deux courbes BC, B′C′, les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{dr}{ds}, & \cos\alpha=\dfrac{r\,d\theta}{ds}; \\ \sin\alpha_1=\dfrac{dr_1}{ds_1}, & \cos\alpha_1=\dfrac{r_1\,d\theta_1}{ds_1}, \end{cases}$$

et que, r et r_1 étant égaux, on a aussi

$$(3)\qquad f(\theta)=f_1(\theta_1),$$

les équations (1) donnent

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\theta_1}{ds_1} + \dfrac{d\theta}{dr}\dfrac{dr_1}{ds_1}, \\ \dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{d\theta}{ds} + \dfrac{d\theta_1}{dr_1}\dfrac{dr}{ds}; \end{cases}$$

mais, d'une autre part, on a les deux relations

$$(5)\quad \psi + \theta = \text{arc tang} = \frac{dr_1}{r_1 d\theta_1}, \quad \psi_1 - \theta_1 = \text{arc tang} = \frac{dr}{r d\theta};$$

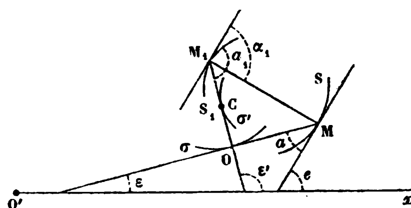
donc, par suite des équations (3) et (5), on peut exprimer θ et θ_1 en fonction de ψ ou de ψ_1.

De là résulte que la première des équations (4) donne $\frac{1}{\rho}$ en fonction de ψ, et que la seconde donne $\frac{1}{\rho_1}$ en fonction de ψ_1. La première est donc le lieu des centres instantanés dans le plan fixe, et la seconde le lieu des centres instantanés dans le plan mobile.

Si l'on voulait obtenir les équations de ces deux lieux en coordonnées cartésiennes, on projetterait le périmètre du triangle OO'G d'abord sur les deux axes Ox, Oy, et ensuite sur les deux axes $O'x'$, $O'y'$.

132. Problème XXI. — *Une droite (fig. 54) OM s'appuie par une de ses extrémités M sur une courbe MS et reste tangente*

Fig. 54.



à une autre courbe Oσ, entraînant avec elle le plan qui la contient, lequel se meut parallèlement au plan commun des

deux courbes, $O\sigma$ *et* MS *lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe.*

Soient les courbes $O\sigma$, MS données par leurs équations naturelles

$$(1)\qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \mathfrak{R} = \varphi(\varepsilon), \quad \frac{ds}{de} = \mathrm{R} = f(e).$$

Si l'on rapporte la courbe s à la courbe σ, en conservant les notations d'usage, on a les équations (nº 62)

$$(2)\quad \sin a = \frac{r\,d\varepsilon}{ds}, \quad \cos a = \frac{d(r+\sigma)}{ds}, \quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sin a}{r} + \frac{da}{ds}.$$

Si l'on élève aux points O et M des normales, leur intersection M_1 est un point du lieu cherché M_1S_1; soient $OM_1 = r_1$ et a_1 et α_1 les angles que la tangente au point M_1 à cette courbe fait avec les deux normales. Nous représentons les éléments de cette courbe par les mêmes lettres représentant les éléments correspondants de la courbe MS; mais, pour les différentier, nous les affectons d'un indice 1.

Équation du lieu des centres de rotation. — Le triangle OMM_1 donne la relation

$$OM_1 = OM \cot a,$$

on en déduit

$$(3)\qquad r_1 = \frac{dr}{d\varepsilon} + \mathfrak{R}.$$

Donc la question est ramenée à calculer $\frac{dr}{d\varepsilon}$ en fonction de ε, question déjà résolue au nº 74; en posant $\frac{dr}{d\varepsilon} = r' = \psi(\varepsilon)$, l'équation du lieu rapportée à la courbe σ sera

$$(3')\qquad r_1 = \psi\left(\varepsilon' - \frac{\pi}{2}\right) + \varphi\left(\varepsilon' - \frac{\pi}{2}\right).$$

Soit $C\sigma'$ la développée de la courbe σ, on voit que la distance CM_1 du point M_1 à cette développée comptée sur la tan-

gente est égale à $\frac{dr}{d\varepsilon}$; donc, si l'on rapporte le lieu des points M_1 à cette développée (système tangentiel), l'équation du lieu sera

$$(4) \qquad r' = \psi\left(\varepsilon' - \frac{\pi}{2}\right);$$

or la développée σ' est donnée par la relation $\sigma' + \mathfrak{R} = \text{const.}$, de laquelle on déduit

$$(5) \qquad \frac{d\sigma'}{d\varepsilon'} = -\varphi'\left(\varepsilon' - \frac{\pi}{2}\right),$$

qui est l'équation naturelle de cette développée (nos 42 et 43).

Tangente. — Rapportons le lieu des points M_1 à la développée σ', nous avons les équations

$$(6) \qquad \frac{d(r'+\sigma')}{ds_1} = \cos a_1, \quad \frac{r'\,d\varepsilon'}{ds_1} = \sin a_1, \quad \frac{d(r'+\sigma')}{r'\,d\varepsilon'} = \cot a_1.$$

Si l'on différentie celle des équations (2) analogue à la dernière des équations (6), en ayant égard aux équations (2), on trouve

$$-\frac{da}{ds} = \frac{r'\sin a}{N^2}(\cot a_1 - \cot a);$$

égalant cette valeur de $\frac{da}{ds}$ à celle qui est fournie par la troisième des équations (2), on obtient

$$(7) \qquad \cot a_1 - \cot a = \frac{N^2}{r'\sin a}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{R}\right),$$

qui est semblable à celle que nous avons trouvée au n° 23, et qui, par conséquent, se construit de même manière et donne la direction de la normale à la courbe s_1.

Rayon de courbure. — Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{da_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{N_1}$$

et que les équations (2) et (6) fournissent la relation

$$r \sin a_1\, ds_1 = r' \sin a\, ds,$$

on a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \cot a}{ds} &= \frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{R}\right), \\ \frac{d \cot a_1}{ds} &= \frac{r'}{r}\,\frac{\sin a}{\sin^3 a_1}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{R_1}\right); \end{aligned} \right.$$

de là résulte que, si l'on différentie l'équation (7), on trouvera, après quelques réductions faciles et en se rappelant que $\frac{da}{ds}$, $\frac{da_1}{ds_1}$ sont représentés par $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{D_1}$, l'équation suivante

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{r'^2}{N^2}\,\frac{\sin^2 a}{\sin^3 a_1}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{R_1}\right) \\ &\quad = \frac{N}{D}\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{D}\right)\cos a \\ &\qquad - \left[\frac{r'}{r}\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{D}\right) - \left(\frac{r''}{rD} + \frac{R'N}{R^3}\right)\right]\sin a, \end{aligned} \right.$$

qui donne l'expression et la construction du rayon de courbure R_1 du lieu des points M_1; or, d'après une remarque déjà faite, lorsque l'on connaît le rayon de courbure du lieu des centres instantanés dans le plan fixe, on connaît par cela même, d'après l'équation (2) du n° 115, le rayon de courbure du lieu des centres instantanés dans le plan mobile.

Lieu des centres instantanés de rotation dans le plan mobile. — On prendra pour axe des x' la droite MO, et pour axe des y' une perpendiculaire menée par le point M; on a

$$r = F(\varepsilon);$$

donc

$$(10) \qquad x' = r = F(\varepsilon), \quad y' - r \cot a = F(\varepsilon) \cot a;$$

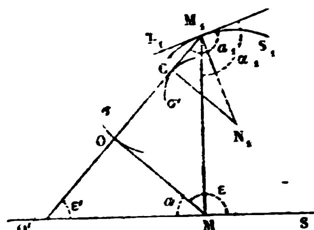
or a est une fonction de ε que l'on peut calculer d'après les équations données au n° 74; donc les équations (10) sont les équations du lieu des points M_1 dans le plan mobile.

La tangente et le rayon de courbure de ce lieu dépendent, d'après ce qui a été dit, de la tangente et du rayon de courbure de la courbe précédemment étudiée.

133. Problème XXII. — *Les mêmes conditions étant posées que dans le problème précédent, la courbe directrice* MS *est une droite, lieu des centres instantanés de rotation.*

Si l'on conserve les notations du numéro précédent et qu'on admette (*fig.* 55) que la droite MS coïncide avec l'axe $O'x$

Fig. 55.



l'angle e devient nul, l'angle ε devient supplémentaire de l'angle a; cela posé, on détermine les éléments de la courbe M_1S_1 de la manière suivante.

Point de la courbe. — Le point M_1 de la courbe est déterminé par l'intersection des normales OM_1, MM_1 aux deux courbes, et l'on a, en appelant ρ la distance MM_1,

$$(1) \qquad \rho = \frac{r}{\sin a} = N = -D.$$

Tangente. — L'équation (7) du numéro précédent donne

$$(2) \qquad \cot a_1 - \cot a = \frac{r}{r' \sin^2 a},$$

de laquelle on déduit, en appelant i l'angle que la tangente à la courbe M_1S_1 fait avec MS,

$$(3) \qquad \frac{r'}{r} = \frac{\sin a_1}{\sin a \sin(a - a_1)} = \frac{\sin a_1}{\sin a \cos i}.$$

Élément de l'arc ds_1. — On a, d'après les formules (2) et (6) du numéro précédent,

$$(4)\qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{r'}{r}\frac{\sin a}{\sin a_1} = \frac{1}{\cos i}.$$

Rayon de courbure. — La formule (9) du numéro précédent donne

$$\frac{r'}{r}\frac{\sin^2 a}{\sin^3 a_1}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{2\cot a}{r'} + \frac{2}{r} - \frac{r''}{r'^2};$$

or, si l'on y remplace N_1 par sa valeur $\frac{r'}{\sin a_1}$, et qu'on en élimine r' au moyen de l'équation (3), on obtient l'équation simple

$$(6)\qquad \frac{1}{R_1 \cos^3 i} = \frac{rr'' - r'^2}{r^3}\sin a - \frac{1}{r\sin a},$$

qui donne une construction facile du rayon de courbure R_1.

Longueur de la tangente T_1 de la normale N_1. — On a les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} T_1 = \dfrac{-r'}{\cos a_1} = \dfrac{r\tan a_1}{\sin a \sin(a_1 - a)}, \\ N_1 = \dfrac{r'}{\sin a_1} = \dfrac{r}{\sin a \sin(a - a_1)}; \end{cases}$$

la sous-tangente et la sous-normale sont données par les formules

$$(8)\qquad s_{t_1} = \frac{r\sin a_1 \tan a_1}{\sin a \sin(a_1 - a)}, \quad s_{n_1} = \frac{r\cos a_1}{\sin a \sin(a_1 - a)}.$$

134. *Seconde méthode de solution; vérification des formules précédentes.* — Soient x et y les coordonnées du point M, par rapport à deux axes rectangulaires dont l'axe des x coïncide avec O'S; cherchons la solution du problème précédent dans ce système de coordonnées.

Point de la courbe. — Soit s la distance du point O' au point M; on a, pour déterminer le point M_1 du lieu les deux

équations, en ayant égard aux équations (2) du n° 132,

$$(1)\qquad x = s,\quad y = \frac{r}{\sin a} = \frac{ds}{d\varepsilon},$$

et comme s et $\frac{ds}{d\varepsilon}$ sont des fonctions de ε (n° 74), l'élimination de cette variable donnera l'équation de la courbe en coordonnées rectangles.

Si s n'est pas connu en fonction de ε, on opérera de la manière suivante : la courbe σ étant connue, en appelant x' et y' les coordonnées du point O de cette courbe et y'_0, x'_0 des constantes, on a

$$(3)\qquad x' - x'_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \cos\varepsilon\, d\sigma,\quad y' - y'_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sin\varepsilon\, d\sigma;$$

or

$$x = x' + y' \cot\varepsilon,\quad y = \frac{y'}{\sin^2\varepsilon};$$

donc on a les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x'_0 + \displaystyle\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \cos\varepsilon\, d\sigma + y'_0 \cot\varepsilon + \cot\varepsilon \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sin\varepsilon\, d\sigma, \\ y = \dfrac{y'_0}{\sin^2\varepsilon} + \dfrac{1}{\sin^2\varepsilon} \displaystyle\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \sin\varepsilon\, d\sigma, \end{cases}$$

qui seront les équations du point M_1.

Tangente. — On a

$$(2)\qquad \tang i = \frac{\dfrac{d}{d\varepsilon}\left(\dfrac{ds}{d\varepsilon}\right)}{\dfrac{ds}{d\varepsilon}};$$

pour vérifier cette formule, il suffit d'y substituer les valeurs de $\frac{ds}{d\varepsilon}$, $\frac{d^2s}{d\varepsilon^2}$ tirées de la deuxième des équations (1); on obtient

$$(2')\qquad \tang i = \frac{r'}{r} + \cot a,$$

laquelle concorde avec l'équation (3) du n° **134**, après l'élimination de a_1.

Élément de l'arc ds_1. — L'élément ds_1 est donné par l'équation suivante, dans laquelle s' et s'' sont les dérivées première et deuxième de s par rapport à ε :

(5) $$ds_1^2 = (s'^2 + s''^2)d\varepsilon^2;$$

cette formule concorde avec la formule (4) du numéro précédent. En effet, en substituant les valeurs de s' et de s'' tirées de la deuxième des équations (1), on a

(5') $$ds_1^2 = \frac{d\varepsilon^2}{\sin^4 a}(r^2 + r'^2 \sin^2 a + 2rr' \cos a \sin a),$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (4) du numéro précédent et en développant,

$$ds_1^2 = \frac{d\varepsilon^2}{\sin^4 a}\left\{r^2 \sin^2 a + r^2\left[\frac{\sin a_1}{\sin(a - a_1)} + \cos a\right]^2\right\}$$
$$= \frac{d\varepsilon^2}{\sin^2 a}\,\frac{r^2}{\sin^2(a - a_1)},$$

et, conséquemment,

(5'') $$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\cos i}.$$

Rayon de courbure R_1. — Il est donné par la formule

(6) $$\frac{1}{R_1} = \frac{s's''' - s''^2}{s'^3}\sin^3(a - a_1);$$

or, en ayant égard aux valeurs des dérivées de s tirées de la deuxième des équations (1), on obtient l'équation

(7) $$\frac{1}{R_1} = \frac{(rr' - r'^2)\sin^2 a - r^2}{r^3 \sin^2 a}\sin^3(a - a_1),$$

qui n'est pas distincte de l'équation (6) du numéro précédent.

135. *Déformation de la courbe, lieu des centres instan-*

tanés. — Les coordonnées rectangles d'un point quelconque du lieu étant

$$(1) \qquad x = s = f'(\varepsilon), \quad y = \frac{ds}{d\varepsilon} = f''(\varepsilon),$$

il en résulte que, si l'on infléchit la longueur s sur une courbe telle que pour cette longueur la tangente en ce point fasse, avec une ligne fixe qui serait la position primitive $O'x$, un angle égal à ε, le rayon de courbure serait égal à $\frac{ds}{d\varepsilon}$, c'est-à-dire à y. Donc le lieu des centres instantanés M_1 provient du développement de cette courbe sur une droite $O'x$, avec cette condition que les rayons de courbure sont entraînés chacun par chaque élément correspondant restant perpendiculaire à cet élément. Le lieu des centres instantanés n'est donc autre chose que le lieu des centres de courbure de cette courbe après le développement tel que nous venons de l'indiquer.

Proposons-nous d'étudier la nature de cette courbe.

Coordonnées du point. — Soient X et Y les coordonnées d'un point de cette courbe. D'après ce que nous avons établi au numéro 134, on a, en supposant nulle la constante y'_0,

$$(2) \qquad f'(\varepsilon) = \frac{1}{\sin^2\varepsilon}\int \sin\varepsilon\, d\sigma;$$

donc les coordonnées rectangles X et Y sont

$$(3) \qquad X = \int \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}\int \sin\varepsilon\, d\sigma, \quad Y = \int \frac{d\varepsilon}{\sin\varepsilon}\int \sin\varepsilon\, d\sigma.$$

Tangente. — L'angle que cette tangente fait avec l'axe des x est ε, comme cela résulte de la nature de la courbe et comme on peut le vérifier par la différentiation des équations (3), puisque l'on a

$$(4) \qquad \frac{dY}{dX} = \tang\varepsilon.$$

Rayon de courbure. — Soit R ce rayon de courbure, on a R

égal à $f'(\varepsilon)$ d'après l'équation (2), et conséquemment

(5) $$R\sin^2\varepsilon = \int \mathfrak{R} \sin\varepsilon\, d\varepsilon;$$

si l'on différentie cette équation, on trouve

(6) $$2R\cos\varepsilon + R'\sin\varepsilon = \mathfrak{R}.$$

Telle est la relation qui lie le rayon de courbure $\mathfrak{R}$ de la courbe $d\sigma$ avec le rayon de courbure de la ligne qui nous occupe et le rayon de courbure de sa développée. Si l'on se reporte à la figure, on voit que si, à partir du point M, on prend une longueur égale à $2R$ double de la normale MM_1 et en sens inverse de cette normale, qu'à l'extrémité de cette longueur on mène une perpendiculaire égale au rayon R' de la développée, dans le sens des x positifs, le centre de courbure de la courbe σ sera la projection de l'extrémité de R' sur la direction de la normale OM_1 à la courbe $d\sigma$.

Le rayon de courbure R et les rayons de ses développées première et seconde sont aussi liés par une relation simple avec le rayon de courbure R_1 de la courbe après le développement; cette relation est

(7) $$\frac{1}{R_1\cos^2 i} = -\frac{R'^2}{R^3} + \frac{R''}{R^2} - \frac{2}{R\sin^2 a};$$

elle résulte de l'élimination de r, r', r'' entre l'équation (6) du n° 133 et l'équation

$$r = R\sin a,$$

et ses deux dérivées par rapport à ε.

136. Problème XXIII. — *Étant données les mêmes conditions que dans le problème précédent, d'un point* O″ *on mène des rayons égaux et parallèles à* MO. *Nature du lieu des extrémités de ces rayons* (*fig.* 55).

Soient $\mathfrak{r}$, ε, σ_1, $\mathfrak{R}_1$ le rayon vecteur, l'angle polaire, l'arc et le rayon de courbure de la courbe; α, i les angles de la tangente avec le rayon vecteur et avec l'axe $O''x$; on a les équations

relatives à cette courbe

$$(1) \qquad \frac{\iota\, d\varepsilon}{d\sigma_1} = \sin\alpha, \quad \frac{d\iota}{d\sigma_1} = \cos\alpha,$$

et aussi les équations

$$(2) \qquad d\sigma + dr = ds\cos a, \quad r\,d\varepsilon = ds\sin a$$

relatives à la courbe σ.

Tangente. — Comme ι et r sont égaux, on a, d'après l'équation (2) du n° **134**,

$$\cot\alpha = \frac{r'}{r} = \operatorname{tang} i - \cot a,$$

et conséquemment

$$(3) \qquad \cot\alpha + \cot\alpha_1 + \cot a = 0;$$

telle est la relation qui lie les angles α et α_1 des tangentes des courbes s_1 et σ_1 avec leurs rayons vecteurs, et l'angle a que chacun des deux rayons vecteurs fait avec l'axe des x.

Élément de la courbe

$$d\sigma_1^2 = (r^2 + r'^2)\,d\varepsilon^2.$$

Conséquemment, en ayant égard aux équations (2) du numéro présent et aux équations (6) du n° **132**, on obtient la formule

$$(4) \qquad d\sigma_1^2 = ds^2\sin^2 a + ds_1^2\sin^2 a_1.$$

Rayon de courbure Q. — On a les relations

$$(5) \qquad \frac{1}{Q} = \frac{\sin\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{d\sigma_1}, \quad \cot\alpha = \frac{r'}{r};$$

si l'on différentie cette dernière et qu'on ait égard aux relations (1), on a

$$-\frac{d\alpha}{d\sigma_1} = \frac{rr'' - r'^2}{r^3}\sin^3\alpha;$$

donc

$$(5') \qquad \frac{1}{Q} = \frac{\sin\alpha}{r} + \frac{r'^2 - rr''}{r^2}\sin^3\alpha.$$

Si l'on compare cette équation avec celle de l'équation (6) du n° 133, on trouve l'équation

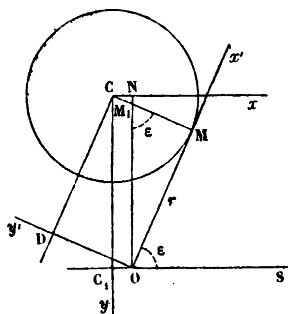
$$(6) \qquad \frac{1}{Q\sin^3\alpha} + \frac{1}{R_1\sin^3\alpha_1\sin a} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2 a}\right);$$

telle est la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure Q et R_1

137. *Application du problème* XXII. — La courbe σ est un cercle dont C est le centre, R le rayon et R_1 la distance du centre à la droite fixe C_1S.

1° *Lieu des centres instantanés* M_1 *dans le plan fixe.* — On prend (*fig.* 56) pour axes coordonnées deux droites rec-

Fig. 56.



tangulaires menées par le point C_1, dont l'une parallèle à la droite C_1S. Si l'on projette le contour C_1OMC d'abord sur CM, on a l'équation

$$R_1 = R\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon;$$

or le triangle CNM_1 donne

$$y = x\cot\varepsilon;$$

l'élimination de ε entre ces deux équations donne l'équation

$$(x^2 + R_1 y)^2 = R^2(x^2 + y^2). \tag{1}$$

2° *Lieu des centres instantanés dans le plan mobile.* — On rapporte le point M_1 aux axes Ox', Oy' passant par le point O, et l'on obtient

$$(x'^2 + Ry')^2 = R_1^2(x'^2 + y'^2); \tag{2}$$

de là résulte que le mouvement du plan mobile est le même que celui d'un plan mobile contenant une droite CD et un point O, la droite CD passant par un point fixe C, et le point O glissant sur une droite fixe C_1S située dans le plan fixe. C'est ce que l'on voit directement sur la figure; car CD parallèle à OM passe constamment par C, et le point O, extrémité de la perpendiculaire OD à CD, se trouve toujours sur C_1S. C'est ce mouvement que nous avons déjà étudié au n° 129.

138. *Application du problème* XXI. — La courbe σ et la courbe s sont des cercles dont les centres sont C et C_1 et les rayons R et R_1; δ est la distance des centres.

1° Rapportez le cercle R_1 au cercle R dans le système tangentiel r et ε. Projetez (*fig.* 57) la ligne brisée $CODC'M$ sur OM

Fig. 57.

et sur CO, on trouve les équations

$$(1)\quad \begin{cases} r = R_1 \sin a + \delta \cos\varepsilon, \\ R = -R_1 \cos a + \delta \sin\varepsilon; \end{cases}$$

si l'on élimine a entre ces deux équations, on a la courbe s, c'est-à-dire le cercle R_1 rapporté au cercle R; et ce sera l'inverse si l'on élimine entre ces deux équations l'angle ε. On obtient ainsi

$$(2) \qquad r = \delta \cos\varepsilon \pm \sqrt{R_1^2 - (R - \delta \sin\varepsilon)^2}.$$

$$(3) \qquad r = R_1 \sin a \pm \sqrt{\delta^2 - (R - R_1 \cos a)^2},$$

2° *Lieu des centres instantanés* M_1 *dans le plan fixe.* — Soient x et y les coordonnées du point M_1 par rapport à deux axes rectangulaires passant par C, dont l'axe des x coïncide avec CC_1; soit $CM_1 = \rho$ et ψ l'angle de ρ avec l'axe des x, on a

$$(4) \qquad \frac{OM_1}{OM} = \tang\left(a - \frac{\pi}{2}\right);$$

donc

$$(5) \quad \rho = R - r \cot a = R - R_1 \cos a \pm \cot a \sqrt{\delta^2 - (R - R_1 \cos a)^2},$$

équation entre les deux coordonnées ρ et a; il ne reste qu'à éliminer a entre cette équation et la deuxième des équations (1) : on trouve

$$\rho = -\delta \cos\theta \pm \frac{\delta(R - \delta\cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{R_1^2 - (R - \delta\cos\theta)^2}},$$

qui est l'équation polaire du lieu.

Lieu des centres instantanés dans le plan mobile. — En procédant comme il vient d'être fait et en remarquant que les coordonnées polaires sont ρ_1 et a considérées dans le plan mobile, on trouvera l'équation suivante :

$$\rho_1 = R_1 + \frac{\delta}{\sin a}\sqrt{\delta^2 - (R - R_1 \cos a)^2}.$$

139. Problème XXIV. — *Les mêmes conditions étant données que dans le problème* XXI (n° 132), *déterminer la courbe s de telle sorte que l'angle des deux normales soit proportionnel à l'angle que la droite mobile* OM *fait avec l'axe fixe* (*fig.* 54).

Conditions du problème. — On a la condition

$$(1) \qquad \frac{d(r+\sigma)}{r\,d\varepsilon} = \frac{\cos m\varepsilon}{\sin m\varepsilon},$$

laquelle, quand on a égard à la relation $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\varepsilon)$, donne l'équation différentielle de la courbe

$$(2) \qquad \frac{dr}{d\varepsilon} - r\cot m\varepsilon + \varphi(\varepsilon) = 0,$$

qui est linéaire; son intégrale est

$$(3) \qquad r = C\sin^{\frac{1}{m}} m\varepsilon - \sin^{\frac{1}{m}} m\varepsilon \int \varphi(\varepsilon)\sin^{-\frac{1}{m}} me\, d\varepsilon;$$

cette équation est celle de la courbe s rapportée à la courbe σ comme courbe des pôles. Il faut y joindre les relations angulaires

$$(4) \qquad a = m\varepsilon, \quad e = a + \varepsilon, \quad e = (m+1)\varepsilon.$$

Équation naturelle de la courbe. — On a les relations

$$(5) \qquad \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{r}{\sin a} = \frac{r}{\sin m\varepsilon};$$

or si, pour abréger, on représente par $F(\varepsilon)$ le second membre de l'équation (3), on a les équations

$$(6) \qquad (1+m)\frac{ds}{de} = \frac{F\left(\frac{a}{m}\right)}{\sin a} = \frac{F\left(\frac{e}{1+m}\right)}{\sin \frac{m}{1+m} e},$$

dont la dernière est l'équation naturelle de la courbe.

Courbe lieu des points M_1 *dans le plan mobile.* — Soient MM_1 le rayon vecteur ρ et ψ l'angle de ce rayon avec la droite MO, on a

$$r = \rho \sin a,$$

et, par suite,

$$(7) \qquad \rho = \frac{F\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\psi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\psi}{m}\right)}$$

sera l'équation du lieu des points M_1 dans le plan mobile.

Pour avoir l'équation du lieu en coordonnées rectangles, soient MO l'axe des x et une perpendiculaire menée par le point M à cette droite l'axe des y, et x', y' les coordonnées du point M_1 par rapport à ces axes; on a

$$x' = OM, \quad y' = OM_1;$$

donc

$$(8) \qquad x' = F(\varepsilon), \quad \frac{y'}{x'} = \cot m\varepsilon$$

donnent les coordonnées x', y' en fonction de la variable ε. L'élimination de ε entre ces deux équations donnera l'équation du lieu en coordonnées rectangles.

140. *Solution analytique du problème* IV. — Conservons la notation exposée au n° **115**. Rapportons la courbe C_1, lieu des centres instantanés dans le plan mobile aux courbes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, développées des courbes ν, ν_1 situées dans le plan mobile; les coordonnées du point de la courbe C_1 par rapport à $\mathfrak{B}$ seront ρ et ε, et, par rapport à la courbe $\mathfrak{B}_1$, elles seront ρ_1, ε_1. De même, si l'on rapporte la courbe C, lieu des centres instantanés dans le plan fixe, aux courbes B, B_1 développées des courbes n, n_1 situées dans le plan fixe, les coordonnées seront r, e par rapport à la courbe B, et r_1, e_1 par rapport à la courbe B_1. Cela posé, si l'on se reporte au n° **115**, on déduit des équations (ν) et (n) les relations

$$(1) \qquad \rho\, d\varepsilon = r\, de, \quad \rho_1\, d\varepsilon_1 = r_1\, de_1,$$

et les deux suivantes :

$$(2) \qquad \rho + r = \varphi(\varepsilon) + f(e), \quad \rho_1 + r_1 = \varphi_1(\varepsilon_1) + f_1(e_1);$$

or les quatre angles e, e_1, ε, ε_1 sont tels que trois sont fonctions du quatrième. En effet, si l'on représente par ξ, η, ξ_1, η_1 les coordonnées rectangulaires des points de contact E, E_1 des courbes ν, ν_1 avec les courbes n, n_1, et par x, y, x_1, y_1 les coordonnées des mêmes points de contact en tant qu'appartenant aux courbes n, n_1, les premières coordonnées par rapport à deux axes $O'x'$, $O'y'$ situés dans le plan mobile, les secondes par rapport à deux axes Ox, Oy situés dans le plan fixe, on a

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \int \cos\varepsilon\, d\sigma, & \eta = \int \sin\varepsilon\, d\sigma; \\ \xi_1 = \int \cos\varepsilon_1\, d\sigma_1, & \eta_1 = \int \sin\varepsilon_1\, d\sigma_1; \\ x = \int \cos e\, ds, & y = \int \sin e\, ds; \\ x_1 = \int \cos e_1\, ds_1, & y_1 = \int \sin e_1\, ds_1. \end{cases}$$

La distance EE_1, suivant qu'elle sera exprimée dans l'un ou l'autre système de coordonnées, donnera deux valeurs D ou Δ qui devront être identiques; on a donc, outre l'équation

$$(4)\qquad e_1 - e = \varepsilon_1 - \varepsilon,$$

l'équation suivante :

$$(5)\qquad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2.$$

Appelons τ et t les angles que la ligne EE_1 des points de contact fait avec l'axe des $O'x'$ dans le plan mobile et avec l'axe Ox dans le plan fixe, il est évident que l'on aura la relation

$$(6)\qquad \tau - t = e - \varepsilon = e_1 - \varepsilon_1,$$

et comme on a

$$\cos t = \frac{x_1 - x}{D}, \quad \sin t = \frac{y_1 - y}{D},$$
$$\cos\tau = \frac{\xi_1 - \xi}{\Delta}, \quad \sin\tau = \frac{\eta_1 - \eta}{\Delta},$$

on aura, en prenant les cosinus des deux membres de l'équa-

tion (6), la relation suivante :

$$(6') \quad \frac{(x_1 - x)(\xi_1 - \xi) + (y_1 - y)(\eta_1 - \eta)}{D\Delta} = \cos(e - \varepsilon);$$

on a donc trois relations entre les angles ε, ε_1; e, e_1.

Si maintenant on fait usage des équations (1) et (2), on aura *ad libitum :* ρ en fonction de ε; ρ_1 en fonction de ε_1; ou bien r en fonction de e; r_1 en fonction de e_1. Les deux premières sont les équations du lieu des centres instantanés dans le plan mobile rapporté à la courbe $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{B}_1$; les deux autres sont les équations du lieu des centres instantanés rapporté à la courbe B ou à la courbe B_1.

Équations du lieu en coordonnées rectangulaires. — Soient X′, Y′, X, Y les coordonnées du point de contact A des courbes $\mathfrak{C}_1$ et C, les premières par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$, les secondes par rapport aux axes Ox, Oy; on a l'un ou l'autre système d'équations

$$(7) \quad \begin{cases} X' = \xi + \rho\cos\varepsilon = \xi_1 + \varepsilon_1\cos\varepsilon_1, \\ Y' = \eta + \rho\sin\varepsilon = \eta_1 + \rho_1\sin\varepsilon_1; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} X = x + r\cos e = x_1 + r_1\cos e_1, \\ Y = y + r\sin e = y_1 + r_1\sin e_1; \end{cases}$$

or les équations (7) sont les équations du lieu dans le plan mobile, tandis que les équations (8) sont celles du lieu dans le plan fixe.

CHAPITRE IV.

DES COURBES RÉSULTANT DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE QUI SE DÉFORME.

Lorsqu'une figure plane cesse d'être invariable et qu'elle se déforme à chaque instant d'après une loi donnée, les intersections de deux droites décrivent des courbes, et ces droites dans leurs diverses positions enveloppent d'autres courbes; or il importe de soumettre à notre analyse les premières et les secondes, et de déterminer toutes les particularités qui leur appartiennent; c'est là l'objet du présent Chapitre. Cette étude devient intéressante au point de vue géométrique par les résultats auxquels elle conduit, et au point de vue analytique par la régularité des moyens et la simplicité des méthodes.

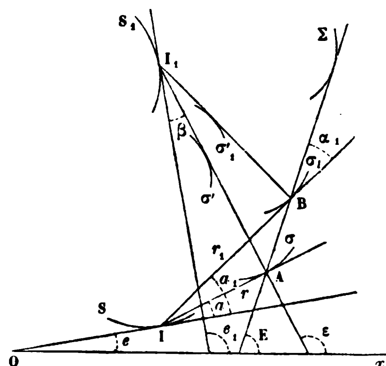
§ I. — PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

141. PROBLÈME I. — *Étant données trois courbes* $\frac{ds}{de}$, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, $\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$ (*fig.* 58) *situées dans un même plan, des différents points de la première on mène des tangentes aux deux autres; enveloppe de la ligne qui joint les deux points de contact.*

Soit $\frac{d\Sigma}{dE}$ cette enveloppe; r, r_1 sont les rayons tangentiels des deux courbes $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, $\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$ par rapport à la courbe s; a et a_1 les angles qu'ils forment avec la tangente à cette courbe; N et N_1 les normales correspondantes; ρ, ρ_1 les rayons tangentiels de la courbe Σ successivement rapportée aux courbes σ et σ_1; α, α_1 les angles qu'ils forment avec les tangentes r, r_1 à ces deux courbes; ν, ν_1 les normales correspondantes. Représentons

par R, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, Q les rayons de courbure des courbes s, σ, σ_1, Σ.

Fig. 58.



On a, pour les deux courbes σ, σ_1 rapportées à la courbe s, les équations

$$(1)\quad \begin{cases} r\,d\varepsilon = ds\sin a, & d(\sigma - r) = ds\cos a; \\ r_1\,d\varepsilon_1 = ds\sin a_1, & d(\sigma_1 - r_1) = ds\cos a_1; \\ \varepsilon = a + e, & \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin a}{r} - \dfrac{da}{ds}; \\ \varepsilon_1 = a_1 + e, & \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin a_1}{r_1} - \dfrac{da_1}{ds}; \end{cases}$$

et, pour la courbe Σ rapportée successivement aux courbes σ, σ_1, les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \rho\,dE = d\sigma\sin\alpha, & d(\Sigma - \rho) = d\sigma\cos\alpha; \\ \rho_1\,dE = d\sigma_1\sin\alpha_1, & d(\Sigma - \rho_1) = d\sigma_1\cos\alpha_1; \\ E = \alpha + \varepsilon, & \dfrac{1}{\mathfrak{R}} = \dfrac{\sin\alpha}{\rho} - \dfrac{d\alpha}{d\sigma}; \\ E = \alpha_1 + \varepsilon_1, & \dfrac{1}{\mathfrak{R}_1} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\rho_1} - \dfrac{d\alpha_1}{d\sigma_1}. \end{cases}$$

Détermination du point de contact de l'enveloppe avec la

ligne mobile. — On déduira des deux premières équations de la première série la relation

$$(3) \qquad \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} = \frac{N}{N_1},$$

et des deux équations de la deuxième série la relation

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{d\sigma}{d\sigma_1}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}}{\dfrac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}}\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_1}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1},$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_1}\frac{N_1}{N}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}.$$

Il suffira donc de partager $(\rho - \rho_1)$ dans le rapport exprimé par le second membre de cette dernière équation qui ne renferme rien d'inconnu.

Rayon de courbure de l'enveloppe. — Remarquons que l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$(5) \qquad \frac{\nu N}{\mathfrak{R}} = \frac{\nu_1 N_1}{\mathfrak{R}_1};$$

si on la différentie par rapport à σ, on aura la relation

$$(6) \quad \left(\frac{d\nu}{\nu\, d\sigma} - \frac{d\nu_1}{\nu_1\, d\sigma}\right) + \left(\frac{d\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_1\, d\sigma} - \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}\, d\sigma}\right) - \left(\frac{dN_1}{N_1\, d\sigma} - \frac{dN}{N\, d\sigma}\right) = 0.$$

Il faut calculer ces différentes dérivées; or on a les relations

$$(7) \quad \nu = \frac{\rho}{\sin\alpha}, \quad \nu_1 = \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1}; \quad N = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad N_1 = \frac{r_1}{\sin\alpha_1};$$

de plus, les équations de la première et de la deuxième série qui contiennent les cosinus peuvent s'écrire sous la forme sui-

vante :

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\sigma} = \dfrac{1}{\nu}(Q - \nu\cos\alpha), & \dfrac{d\rho_1}{d\sigma} = \dfrac{1}{\nu}(Q - \nu_1\cos\alpha_1); \\ \dfrac{dr}{d\sigma} = 1 - \dfrac{N}{\mathfrak{R}}\cos a, & \dfrac{dr_1}{d\sigma} = \dfrac{\nu_1}{\nu}\left(1 - \dfrac{N_1}{\mathfrak{R}_1}\cos a_1\right). \end{cases}$$

Si l'on a égard à ces relations et aux dernières équations des séries (1) et (2), les différentielles des équations (7) par rapport à σ donneront les formules suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d\nu}{\nu\, d\sigma} = \dfrac{1}{\nu\sin\alpha}\left(\dfrac{Q}{\nu} - 2\cos\alpha + \dfrac{\nu\cos\alpha}{\mathfrak{R}}\right), \\ \dfrac{d\nu_1}{\nu_1\, d\sigma} = \dfrac{1}{\nu\sin\alpha_1}\left(\dfrac{Q}{\nu_1} - 2\cos\alpha_1 + \dfrac{\nu_1\cos\alpha_1}{\mathfrak{R}_1}\right), \\ \dfrac{dN}{N\, d\sigma} = \dfrac{1}{\nu\sin a}\left[\nu\left(\dfrac{1}{N} - \dfrac{\cos a}{\mathfrak{R}}\right) - \nu\left(\dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{R}\right)\dfrac{N\cos a}{\mathfrak{R}}\right], \\ \dfrac{dN_1}{N_1\, d\sigma} = \dfrac{1}{\nu\sin a_1}\left[\nu_1\left(\dfrac{1}{N_1} - \dfrac{\cos a_1}{\mathfrak{R}_1}\right) - \nu\left(\dfrac{1}{N_1} - \dfrac{1}{R}\right)\dfrac{N\cos a_1}{\mathfrak{R}}\right]; \end{cases}$$

d'une autre part, on a les équations

$$(10)\qquad \frac{d\mathfrak{R}}{d\sigma} = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}, \quad \frac{d\mathfrak{R}_1}{d\sigma} = \frac{\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}_1}\,\frac{\nu_1}{\nu}.$$

Si l'on a égard aux différentes expressions de ces dérivées, l'équation (6) devient

$$(11)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho_1}\right)Q - (\cot\alpha - \cot\alpha_1) \\ \quad + \left(\dfrac{\nu\cos\alpha}{\mathfrak{R}\sin\alpha} - \dfrac{\nu_1\cos\alpha_1}{\mathfrak{R}_1\sin\alpha_1}\right) + \left(\dfrac{\nu}{r} - \dfrac{\nu_1}{r_1}\right) \\ \quad - \left(\dfrac{\nu}{\mathfrak{R}}\cot a - \dfrac{\nu_1}{\mathfrak{R}_1}\cot a_1\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\nu N}{\mathfrak{R}} + \dfrac{\nu_1 N_1}{\mathfrak{R}_1}\right) \\ \quad \times\left[\left(\dfrac{\cos a_1}{r_1} - \dfrac{\cos a}{r}\right) + \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\cos a}{\sin a} - \dfrac{\cos a_1}{\sin a_1}\right)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}_1^2}\nu_1 - \dfrac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}^2}\nu = 0, \end{cases}$$

laquelle fait connaître le rayon de courbure Q du lieu en fonction des rayons de courbure des courbes s, σ, σ_1 et des développées de ces deux dernières.

142. Problème II. — *Étant données trois courbes $\frac{d\Sigma}{dE}$, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, $\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$, d'un point quelconque de la première on mène une tangente à cette courbe, et par les points d'intersection de cette tangente avec les courbes σ et σ_1 on mène des tangentes à ces courbes; lieu des intersections de ces tangentes.*

Ce problème est inverse du précédent et est résolu par les mêmes équations (*fig.* 58).

Point de la courbe. — Soit s la courbe cherchée, un point quelconque de cette courbe est déterminé par la résolution du triangle dont les côtés sont r, r_1, $\rho_1 - \rho$; on a la série des rapports

$$(1) \qquad \frac{r}{\sin\alpha_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha} = \frac{\rho_1 - \rho}{\sin(a_1 - a)};$$

or, de ce triangle, on connaît les angles α, α_1 et un côté $\rho_1 - \rho$.

Tangente. — L'équation (5) du numéro précédent peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(2) \qquad \frac{\nu r}{\mathfrak{R}} \sin a_1 = \frac{\nu_1 r_1}{\mathfrak{R}_1} \sin a, \quad \frac{\nu r}{\mathfrak{R} \sin a} = \frac{\nu_1 r_1}{\mathfrak{R}_1 \sin a_1};$$

or dans cette équation tout est connu, excepté a et a_1; elle fait donc connaître le rapport des sinus des angles a et a_1, et la question est ramenée à partager l'angle des rayons r et r_1 dans le rapport des sinus des angles a, a_1, par une ligne droite qui n'est autre chose que la tangente à la courbe s.

Rayon de courbure. — La formule (11) du numéro précédent fait connaître le rayon de courbure R de la courbe s au moyen des données de la question.

143. Problème III (*fig.* 58). — *Les mêmes choses étant données que dans le problème* I; *lieu des intersections* I_1 *des normales aux courbes σ, σ_1 aux points où des tangentes menées d'un point quelconque de s touchent ces deux courbes.*

Conditions du problème. — Soient ds_1, de_1, $\frac{1}{R_1}$ l'arc, l'angle de contingence et la courbure de la courbe lieu des points I_1; β, β_1 les angles que les normales font avec la tangente à la courbe s_1; si l'on rapporte les développées σ', σ'_1 des courbes σ, σ_1 à la courbe s_1, et qu'on représente par τ, τ_1 les rayons tangentiels, on a la double série d'équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\tau\, d\varepsilon' = ds_1 \sin\beta, && d(\sigma' - \tau) = ds_1 \cos\beta;\\ &\tau_1\, d\varepsilon'_1 = ds_1 \sin\beta_1, && d(\sigma'_1 - \tau_1) = ds_1 \cos\beta_1;\\ &e_1 = \varepsilon' - \beta, && \frac{1}{R_1} = \frac{\sin\beta}{\tau} - \frac{d\beta}{ds_1};\\ &e_1 = \varepsilon'_1 - \beta_1, && \frac{1}{R_1} = \frac{\sin\beta_1}{\tau_1} - \frac{d\beta_1}{ds_1}.\end{aligned}\right.$$

Point de la courbe. — Le triangle ABI, dont les côtés sont $\tau + \mathfrak{R}$, $\tau_1 + \mathfrak{R}_1$ et le sommet I_1, est déterminé, puisque l'on connaît la base AB et les angles adjacents à cette base; on a donc

$$(2)\qquad \frac{\rho - \rho_1}{\sin(\beta_1 - \beta)} = \frac{\tau + \mathfrak{R}}{\cos\alpha_1} = \frac{\tau_1 + \mathfrak{R}_1}{\cos\alpha}.$$

Tangente.— Si l'on appelle $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ les normales à la courbe s_1 par rapport aux courbes σ', σ'_1, on a les relations

$$\tau = \mathfrak{N}\sin\beta,\quad \tau_1 = \mathfrak{N}_1 \sin\beta_1,$$

et conséquemment on déduit des équations (1) la relation

$$(3)\qquad \frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon'_1} = \frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}};$$

or les angles $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$ sont égaux, chacun à chacun, aux angles $d\varepsilon'$, $d\varepsilon'_1$; on en déduit la relation suivante, que l'on peut écrire sous une double forme,

$$(4)\qquad \frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}} = \frac{N_1}{N},\quad \frac{\tau}{\tau_1}\frac{\sin a}{\sin a_1} = \frac{r}{r_1}\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1}.$$

Cette équation fait connaître le rapport des sinus des angles

β et β_1, et par conséquent la direction de la tangente à la courbe σ_1.

Rayon de courbure. — Si l'on différentie l'équation (4) par rapport à s_1, on a

$$(5)\qquad \frac{d\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_1\,ds_1} - \frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}\,ds_1} = \frac{dN_1}{N_1\,ds_1} - \frac{dN}{N\,ds};$$

or on a les relations

$$(6)\qquad \frac{ds}{ds_1} = \frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{N_1}{\mathcal{N}_1};$$

conséquemment on obtient les équations

$$\frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}\,ds_1} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mathfrak{R}'}{\mathcal{N}} - 2\cos\beta + \frac{\tau\cos\beta}{R_1\sin\beta}\right),$$
$$\frac{d\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_1\,ds_1} = \frac{1}{\tau_1}\left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\mathcal{N}_1} - 2\cos\beta_1 + \frac{\tau_1\cos\beta_1}{R_1\sin\beta_1}\right).$$

On trouve de la même manière

$$\frac{dN}{N\,ds_1} = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\mathfrak{R}}{r} - \frac{2\cos a}{\sin a} + \frac{N\cos a}{R\sin a}\right),$$
$$\frac{dN_1}{N_1\,ds_1} = \frac{1}{\mathcal{N}_1}\left(\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1} - \frac{2\cos a_1}{\sin a_1} + \frac{N_1\cos a_1}{R\sin a_1}\right);$$

or, si l'on a égard à ces valeurs, l'équation (5) deviendra

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{N}_1}{R_1}\left(\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) - \frac{N_1}{R}\left(\frac{\cos a_1}{\sin a_1} - \frac{\cos a}{\sin a}\right)\\ + 2\,\frac{N_1}{N}\,\frac{\sin(a-\beta)}{\sin a\sin\beta} - 2\,\frac{\sin(a_1-\beta_1)}{\sin a_1\sin\beta_1}\\ + \left(\frac{\mathfrak{R}}{r} - \frac{\mathfrak{R}'}{\tau}\right)\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}} + \left(\frac{\mathfrak{R}'_1}{\tau_1} - \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1}\right) = 0,\end{aligned}$$

que nous pouvons écrire sous la forme suivante, qui est tout

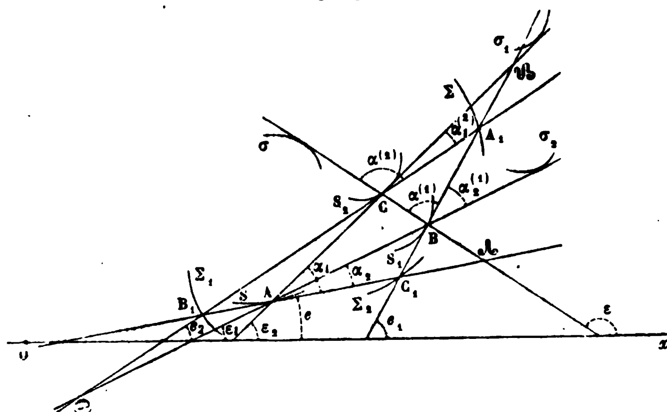
à fait symétrique,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R_1}\left(\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{N_1\cos a_1}{\mathfrak{N}_1\sin a_1} - \frac{N\cos a}{\mathfrak{N}\sin a}\right)\\ &\qquad + \frac{2}{\mathfrak{N}}\,\frac{\sin(a-\beta)}{\sin a\sin\beta} - \frac{2}{\mathfrak{N}_1}\,\frac{\sin(a_1-\beta_1)}{\sin a_1\sin\beta_1}\\ &\qquad = \frac{1}{\mathfrak{N}}\left(\frac{\mathcal{R}'}{\tau} - \frac{\mathcal{R}}{r}\right) - \frac{1}{\mathfrak{N}_1}\left(\frac{\mathcal{R}'_1}{\tau_1} - \frac{\mathcal{R}_1}{r_1}\right), \end{aligned}\right.$$

qui fait connaître le rayon de courbure R_1 de la courbe s_1.

144. Problème IV. — *Les trois sommets d'un triangle* A, B, C (*fig.* 59) *parcourent trois courbes s, s_1, s_2, tandis que les côtés*

Fig. 59.



opposés enveloppent trois courbes σ, σ_1, σ_2, relations entre les tangentes et les rayons de courbure.

Conditions du problème. — Soient $A\sigma_2$, $A\sigma_1$; $B\sigma_2$, $B\sigma$; $C\sigma$, $C\sigma_1$, représentés par t_2, t_1; $t_2^{(1)}$, $t^{(1)}$; $t^{(2)}$, $t_1^{(2)}$. Soient α_2, α_1; $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ $\alpha^{(2)}$, $\alpha_1^{(2)}$ les angles que ces rayons tangentiels font avec les tangentes aux sommets. Soient R, R_1, R_2 les rayons de courbure des courbes s, s_1, s_2; $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ ceux des courbes σ, σ_1, σ_2. Soient ε, ε_1, ε_2; e, e_1, e_2 les angles que les tangentes aux courbes σ, σ_1, σ_2; s, s_1, s_2 font avec un axe fixe; si l'on rapporte s

aux courbes σ_1 et σ_2, on aura la série d'équations

$$
(\mathrm{S})\quad \left\{
\begin{array}{ll}
t_2\, d\varepsilon_2 = ds \sin\alpha_2, & d(\sigma_2 - t_2) = ds \cos\alpha_2;\\
t_1\, d\varepsilon_1 = ds \sin\alpha_1, & d(\sigma_1 - t_1) = ds \cos\alpha_1;\\
\varepsilon_2 = \alpha_2 + e, & \dfrac{1}{\mathrm{R}} = \dfrac{\sin\alpha_2}{t_2} - \dfrac{d\alpha_2}{ds};\\
\varepsilon_1 = \alpha_1 + e, & \dfrac{1}{\mathrm{R}} = \dfrac{\sin\alpha_1}{t_1} - \dfrac{d\alpha_1}{ds}.
\end{array}
\right.
$$

On obtiendra deux autres séries d'équations semblables : la première pour la courbe s_1, que nous appellerons série (S_1) ; la seconde pour la courbe s_2, que nous appellerons série (S_2) ; on les déduira de la série (S) par la permutation rotatoire des indices, soit supérieurs, soit inférieurs.

Relations entre les tangentes. — Si l'on multiplie entre elles les trois premières équations de la première ligne des séries (S), (S_1), (S_2) et les trois premières équations de la deuxième ligne des mêmes séries, et qu'on divise la première des équations résultantes par la seconde, on obtient la relation suivante :

$$
(\mathrm{T})\qquad \frac{t_2\, t^{(1)} t_1^{(2)}}{t_1\, t_2^{(1)} t^{(2)}} = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha^{(1)} \sin\alpha_1^{(2)}}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2^{(1)} \sin\alpha^{(2)}}.
$$

Cette relation peut s'écrire sous une autre forme ; car si l'on introduit les six normales relatives aux six rayons tangentiels données chacune par une relation dont la suivante est le type

$$
(2)\qquad t_2 = \mathrm{N}_2 \sin\alpha_2,
$$

l'équation (T) deviendra

$$
(n)\qquad \frac{\mathrm{N}_2}{\mathrm{N}_1}\,\frac{\mathrm{N}^{(1)}}{\mathrm{N}_2^{(1)}}\,\frac{\mathrm{N}_1^{(2)}}{\mathrm{N}^{(2)}} = 1,
$$

qui est une relation entre les normales aux courbes de la question, et d'après laquelle on pourra construire la normale à l'une d'elles lorsque les autres courbes seront connues.

Posons, pour abréger, les rapports de deux normales, égaux aux auxiliaires ν, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, l'équation précédente pourra s'écrire

sous la forme simple

$$(\nu) \qquad \nu\nu^{(1)}\nu^{(2)} = 1.$$

Relation entre les rayons de courbure. — Il existe entre les rayons de courbure des six courbes une relation remarquable que nous allons calculer.

Écrivons les trois équations

$$(1) \qquad \nu = \frac{N_2}{N_1}, \quad \nu^{(1)} = \frac{N^{(1)}}{N_2^{(1)}}, \quad \nu^{(2)} = \frac{N_1^{(2)}}{N^{(2)}};$$

on obtient, par la comparaison des premières équations de chaque ligne dans les séries (S), (S_1), (S_2), les relations suivantes :

$$(3) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{N_2^{(1)}}{N_2}, \quad \frac{ds_2}{ds_1} = \frac{N^{(2)}}{N^{(1)}}, \quad \frac{ds}{ds_2} = \frac{N_1}{N_1^{(2)}};$$

cela posé, si l'on différentie l'équation (ν), on aura la relation

$$(\nu') \qquad \frac{d\nu}{\nu\, ds}ds + \frac{d\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}ds_1}ds_1 + \frac{d\nu^{(2)}}{\nu^{(2)}ds_2}ds_2 = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, le signe Σ s'étendant à tous les indices,

$$(\nu'') \qquad \sum\left(\frac{dN_2}{N_2} - \frac{dN_1}{N_1}\right) = 0;$$

or, si l'on remarque que, par suite de la différentiation de deux des équations (2) et en ayant égard aux équations des séries (S), (S_1), (S_2), on a les relations suivantes :

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dN_2}{N_2\, ds} &= \frac{d\mathfrak{r}_2}{\mathfrak{r}_2\, ds} - \cot\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{r}_2}\left(\frac{\mathfrak{R}_2}{N_2} - 2\cos\alpha_2 + \frac{\mathfrak{r}_2}{R}\cot\alpha_2\right),\\ \frac{dN_1}{N_1\, ds} &= \frac{d\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}_1\, ds} - \cot\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{r}_1}\left(\frac{\mathfrak{R}_1}{N_1} - 2\cos\alpha_1 + \frac{\mathfrak{r}_1}{R}\cot\alpha_1\right),\end{aligned}\right.$$

et deux couples d'équations semblables, le premier relatif à la courbe s_1 et le second à la courbe s_2, l'équation (ν'') prendra

une nouvelle forme. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{R}_2 &\left[\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_2^{(1)}}\right] \\ &+ 2\,\frac{\sin[\alpha_2 - \alpha_2^{(1)}]}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_2^{(1)}} + \frac{N_2 N_1^{(2)}}{N_1 R_2}\,\frac{\sin[\alpha^{(2)} - \alpha_1^{(2)}]}{\sin\alpha_1^{(1)} \sin\alpha^{(2)}}, \end{aligned} \right.$$

et qu'on représente par $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ ce qui devient le second membre lorsque l'on fait subir aux indices deux permutations circulaires successives, on obtient l'équation

$$(6)\qquad \frac{\mathfrak{T}}{N^{(1)} N_2} + \frac{\mathfrak{T}_1}{N_1 N_2^{(1)}} + \frac{\mathfrak{T}_2}{N_2 N_2^{(1)}} = 0,$$

qui établit la relation que nous voulions démontrer entre les rayons de courbure des six courbes.

145. *Transformation des équations précédentes* (*fig.* 59). — Prolongeons les tangentes des courbes s, s_1, s_2 jusqu'à leurs rencontres; soit le triangle $A_1 B_1 C_1$ ainsi formé, de telle sorte que les sommets A_1, B_1, C_1 soient opposés aux courbes s, s_1, s_2; le triangle $A_1 B_1 C_1$ est décomposé en quatre triangles partiels; or les triangles ABC_1, BCA_1, CAB_1 donnent les trois séries des rapports égaux

$$\frac{AC_1}{\sin\alpha_2^{(1)}} = \frac{BC_1}{\sin\alpha_2} = \frac{AB}{\sin C_1},$$

$$\frac{BA_1}{\sin\alpha^{(2)}} = \frac{CA_1}{\sin\alpha^{(1)}} = \frac{BC}{\sin A_1},$$

$$\frac{CB_1}{\sin\alpha_1} = \frac{AB_1}{\sin\alpha_1^{(2)}} = \frac{AC}{\sin B_1};$$

or, en les multipliant membre à membre, on obtient les relations

$$\begin{aligned} &\frac{AC_1 . BA_1 . CB_1}{\sin\alpha_2^{(1)} \sin\alpha^{(2)} \sin\alpha_1} \\ &\quad = \frac{BC_1 . CA_1 . B_1 A}{\sin\alpha_2 \sin\alpha^{(1)} \sin\alpha_1^{(2)}} = \frac{AB . BC . AC}{\sin C_1 \sin A_1 \sin B_1}, \end{aligned}$$

d'après lesquelles l'équation (T) devient

$$(T') \qquad \frac{\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}^{(1)}\,\mathfrak{r}_1^{(2)}}{\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2^{(1)}\,\mathfrak{r}^{(2)}} = \frac{BC_1 . CA_1 . AB_1}{AC_1 . BA_1 . CB_1}.$$

De là on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Les séries des courbes* (*s*) *et* (σ) *déterminent, la première sur le triangle* $A_1B_1C_1$, *et la seconde sur le triangle* ABC, *six segments qui sont tels que le rapport du produit de trois segments non contigus au produit des trois autres segments dans le premier triangle est égal au rapport analogue dans le second.*

Il est aisé de voir que l'analyse précédente s'applique à un polygone quelconque dont les côtés sont tangents chacun à une courbe d'une série (σ), tandis que les sommets reposent chacun sur une des courbes d'une autre série (*s*).

Théorème. — *Si un polygone de n côtés est tel que ses côtés soient tangents chacun à une courbe d'une série* (σ) *de n courbes, tandis que les sommets sont situés chacun sur une courbe d'une autre série* (*s*) *de n courbes, en menant les tangentes aux courbes de la série* (*s*) *aux sommets du polygone, on forme un second polygone qui est tel que les séries des courbes* (*s*) *et* (σ) *déterminent, la première sur le polygone* $A_1B_1C_1D_1\ldots$, *et la seconde sur le polygone* ABCD..., 2*n* *segments qui sont tels que le rapport du produit des segments non contigus au produit des autres segments dans le premier polygone est égal au rapport analogue dans le second.*

Appelons *a*, *b*, *c* les côtés du triangle ABC opposés aux angles A, B, C, et A_1, B_1, C_1 les angles du triangle $A_1B_1C_1$; la formule (5) peut être mise sous la forme suivante :

$$(5') \qquad \mathfrak{T}_2 = -\frac{c\,\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_2^{(1)}} - \frac{2\sin C_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_2^{(1)}} + \frac{N_2 N_1^{(2)}}{N_1 R_2}\,\frac{\sin C}{\sin\alpha_1^{(2)} \sin\alpha^{(2)}}.$$

Représentons par r_1, r_2; $r^{(1)}$, $r_2^{(1)}$; $r_1^{(2)}$, $r^{(2)}$ les segments AB_1, AC_1; BA_1, BC_1; CB_1, CA_1, et par la lettre β affectée des mêmes indices les angles que ces segments font avec les tangentes

aux courbes décrites par les sommets A_1, B_1, C_1, courbes que nous représentons par Σ, Σ_1, Σ_2. Soient E, E_1, E_2 les angles que ces tangentes font avec l'axe fixe de la question, on aura, en rapportant les courbes (s) aux courbes [Σ] correspondantes, des équations analogues à celles de la série (S) du n° 144, que nous représenterons par (Σ). Cela posé, l'équation (T′) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(\text{T}'') \qquad \frac{\tau_2 r^{(1)}}{\tau_1 r^{(2)}} \frac{\tau^{(1)} r_1^{(2)}}{\tau_2^{(1)} r_1} \frac{\tau_1^{(2)} r_2}{\tau^{(2)} r_2^{(1)}} = 1.$$

Différentions cette équation; on déduit des équations de la série (S) trois couples de formules analogues au suivant :

$$\frac{d\tau_1^{(2)}}{\tau_1^{(2)} ds_2} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1^{(2)} N_1^{(2)}} - \frac{\cos\alpha_1^{(2)}}{\tau_1^{(2)}}, \quad \frac{d\tau^{(2)}}{\tau^{(2)} ds_2} = \frac{\mathfrak{R}}{\tau^{(2)} N^{(2)}} - \frac{\cos\alpha^{(2)}}{\tau^{(2)}},$$

et des équations de la série (Σ) trois couples d'équations analogues au suivant :

$$\frac{dr_2}{r_2 ds_2} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{R_2}\cot\beta_2, \quad \frac{dr_2^{(1)}}{r_2^{(1)} ds_2} = \frac{1}{r_2^{(1)}} - \frac{1}{R_2}\cot\beta_2^{(1)};$$

or, si l'on porte ces valeurs dans l'équation différentielle de l'équation (T″) qui est

$$\sum \left(\frac{d\tau_2}{\tau_2 ds} - \frac{d\tau_1}{\tau_1 ds} + \frac{dr^{(1)}}{r^{(1)} ds} - \frac{dr^{(2)}}{r^{(2)} ds} \right) = 0,$$

on obtient l'équation suivante :

$$(6') \qquad TN_1 N_2 + T_1 N_1^{(1)} N_1 + T_2 N_1^{(2)} N_2 = 0,$$

dans laquelle T_2 a la valeur suivante :

$$T_2 = \frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1^{(2)} N_1^{(2)}} - \frac{\mathfrak{R}}{\tau^{(2)} N^{(2)}} - \left[\frac{\cos\alpha_1^{(2)}}{\tau_1^{(2)}} - \frac{\cos\alpha^{(2)}}{\tau^{(2)}} \right] + \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2^{(1)}} \right] - \frac{1}{R_2}[\cot\beta_2 - \cot\beta_2^{(1)}],$$

T et T_1 étant ce que devient le second membre de cette équa-

tion après une première et une seconde permutation circulaire des indices.

146. ***Construction des points, tangentes et rayons de courbure*** (*fig.* 59).

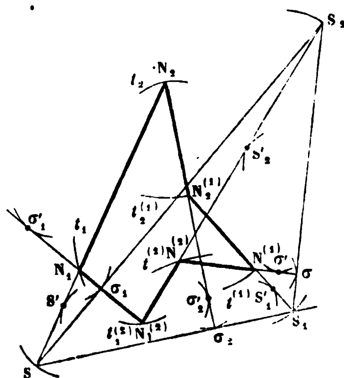
Premier cas. — Toutes les courbes sont connues, à l'exception de la courbe *s* parcourue par le premier sommet A.

Point de la courbe. — La détermination d'un point de la courbe résulte de la construction d'un triangle ABC qui est déterminé.

Tangente. — L'équation (T) fait connaître le rapport de $\sin\alpha_1$ à $\sin\alpha_2$, et la question consiste à mener du point A une droite B_1AC_1 telle que les sinus des angles α_1, α_2 qu'elle forme avec les deux côtés AB, AC soient dans le rapport donné par l'équation (T). Cette droite sera la tangente cherchée. Pour cela, il suffit d'élever sur les deux côtés AB, AC deux perpendiculaires ayant le signe convenable, qui soient entre elles dans le rapport donné, de mener des parallèles à ces côtés par les extrémités de ces perpendiculaires et de joindre le point d'intersection de ces parallèles au point A.

Rayons de courbure (*fig.* 60). — Supposons construites les

Fig. 60.



développées des courbes s, s_1, s_2; σ, σ_1, σ_2, et soient les déve-

loppées représentées par les mêmes lettres accentuées. Soient marqués sur ces courbes les points s', s'_1, s'_2 ; σ', σ'_1, σ'_2 correspondant aux points des premières courbes. Si l'on joint par des droites les points qui marquent les extrémités des normales aux courbes des séries (s) et (σ), en ne joignant que ceux qui se trouvent sur une même normale, on formera un hexagone

$$(N_1 N_1^{(2)} N^{(2)} N^{(1)} N_2^{(1)} N_2),$$

qui satisfait à cette condition que ces six côtés enveloppent les développées des courbes des séries (s) et (σ), tandis que les sommets parcourent des courbes t_1, $t_1^{(2)}$, $t^{(2)}$, $t^{(1)}$, $t_2^{(1)}$, t_2. Dans la question qui nous occupe, toutes les courbes de la série (σ) sont connues, et toutes les courbes de la série (s), moins la courbe s, le sont aussi. Il résulte de là que, si l'on se reporte au n° **132**, on peut déterminer toutes les courbes de la série (t) moins les deux courbes t_1 et t_2. Puisque le point de la courbe s et sa normale sont connus, les points N_2 et N_1 le sont, mais les tangentes des courbes t_1 et t_2 ne sont pas connues. Convenons de représenter aussi par t_1 la direction de la tangente à la courbe décrite par N_1 et ainsi de suite des autres, l'hexagone dont nous venons de parler jouit d'une propriété analogue à celle dont jouit le triangle $s s_1 s_2$; donc cet hexagone donne naissance à une relation analogue à l'équation (T) du n° **144**. Cette relation est

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{N_1^{(2)} s'_2 . N^{(1)} s'_1 . N_2 s' . N^{(2)} \sigma' . N_2^{(1)} \sigma'_2 . N_1 \sigma'_1}{N_1 s' . N_2^{(1)} s'_1 . N^{(2)} s'_2 . N_1^{(2)} \sigma'_1 . N_2 \sigma'_2 . N^{(1)} \sigma'} \\ & = \frac{\sin s'_2 N_1^{(2)} t_1^{(2)} . \sin s'_1 N^{(1)} t^{(1)} . \sin s' N_2 t_2 . \sin \sigma' N^{(2)} t^{(2)} . \sin \sigma'_2 N_2^{(1)} t_2^{(1)} . \sin \sigma'_1 N_1 t_1}{\sin s' N_1 t_1 . \sin s'_1 N_2^{(1)} t_2^{(1)} . \sin s'_2 N^{(2)} t^{(2)} . \sin \sigma'_1 N_1^{(2)} t_1^{(2)} . \sin \sigma'_2 N_2 t_2 . \sin \sigma' N^{(1)} t^{(1)}} \end{aligned} \right.$$

or la courbe décrite par N_1 est le lieu des intersections des normales aux courbes s et σ_1, et par conséquent le lieu des centres instantanés de rotation d'un plan mobile contenant une droite $s\sigma_1$ et un point s, et se mouvant par cette condition que la droite soit tangente à la courbe σ_1 et que le point soit situé sur la courbe s, les deux courbes s et σ_1 étant sur un plan fixe.

D'après la formule (5) du n° 115, on a la relation

$$\left(\frac{1}{s'N_1} - \frac{1}{sN_1}\right)\sin s'N_1t_1 = \frac{\sin\sigma'_1N_1t_1}{N_1\sigma'_1},$$

et, si l'on remarque que $s'N_1 = sN_1 - ss'$, l'équation précédente deviendra

$$(2) \qquad \frac{ss'}{sN_1 - ss'}\,\frac{\sigma'_1N_1}{sN_1} = \frac{\sin\sigma'_1N_1t_1}{\sin s'N_1t_1}.$$

De même la courbe lieu des points N_2 donnera la relation analogue

$$(2') \qquad \frac{ss'}{sN_2 - ss'}\,\frac{\sigma'_2N_2}{sN_2} = \frac{\sin\sigma'_2N_2t_2}{\sin s'N_2t_2},$$

et, en divisant l'une par l'autre, on aura l'équation

$$(3) \qquad \frac{sN_2 - ss'}{sN_1 - ss'}\,\frac{sN_2}{sN_1} = \frac{\sigma'_2N_2}{\sigma'_1N_1}\,\frac{\sin\sigma'_1N_1t_1 . \sin s'N_2t_2}{\sin\sigma'_2N_2t_2 . \sin s'N_1t_1};$$

or le second membre de cette équation est donné par l'équation (1) au moyen des éléments de la question, c'est-à-dire au moyen des éléments de toutes les courbes connues moins la courbe s. En représentant par $\frac{M_2}{M_1}$ la valeur que l'on en déduit pour ce second membre, l'équation (3) donnera la valeur de ss'

$$(4) \qquad ss' = \frac{M_2.(sN_1)^2 - M_1.(sN_2)^2}{M_2.sN_1 - M_1.sN_2}.$$

ss' étant connu, le centre de courbure s' de la courbe s est déterminé : ce qu'il fallait trouver.

Mais l'analyse précédente donne aussi un moyen de déterminer les tangentes t_1 et t_2 des courbes décrites par les points N_1 et N_2. En effet les équations (2) et (2') du présent numéro, dans lesquelles on porterait la valeur de ss' que nous venons de trouver feraient connaître les rapports des sinus qui déterminent les tangentes de ces deux courbes. Ainsi, lorsque la courbe s est inconnue, les courbes décrites par les points N_1

et N_2 sont aussi inconnues, et la détermination des tangentes à ces deux courbes dépend de la détermination de la tangente à la courbe s et de son centre de courbure.

Deuxième cas. — Toutes les courbes sont connues, à l'exception de la courbe σ_2 enveloppée par le côté AB.

Point de contact. — L'équation (T) fait connaître le rapport de t_2 à $t_2^{(1)}$, c'est-à-dire de $s\sigma_2$ à $s_1\sigma_2$, puisque tous les autres segments et tous les angles sont connus; la question est donc ramenée à partager une ligne ss_1 et deux segments proportionnels à deux lignes de grandeur et de signe donnés.

Rayon de courbure. — Dans le cas actuel, σ_2 étant la courbe inconnue, les deux courbes décrites, l'une par N_2 et l'autre par N'_2, sont aussi inconnues; la détermination du point de contact σ_2 fait connaître les points N_2 et $N_2^{(1)}$; cela posé, on a, relativement aux courbes s et s_1, l'équation (2′) et la suivante :

$$(2'') \qquad \frac{s_1 s'_1}{s_1 N_2^{(1)} - s_1 s'_1} \cdot \frac{\sigma'_2 N_2^{(1)}}{s_1 N_2^{(1)}} = \frac{\sin \sigma'_2 N_2^{(1)} t_2^{(1)}}{\sin s'_1 N_2^{(1)} t_2^{(1)}}.$$

Si l'on porte les rapports des sinus tirés des équations (2) et (2″) dans l'équation (1), cette équation fera connaître le rapport des segments $N_2^{(1)}\sigma'_2$, $N_2\sigma'_2$; si l'on représente par $\frac{P_2^{(1)}}{P_2}$ ce rapport, l'équation

$$\frac{N_2^{(1)}\sigma'_2}{N_2\sigma'_2} = \frac{P_2^{(1)}}{P_2}$$

fera connaître le point σ'_2 par la division de la ligne $N_2 N_2^{(1)}$ dans un rapport donné; le centre de courbure de la ligne σ_2 est donc connu. Les deux segments $N_2^{(1)}\sigma'_2$, $N_2\sigma'_2$ étant connus, les équations (2′) et (2″) donneront les rapports des sinus, et par conséquent les directions des tangentes aux points $N_2^{(1)}$, N_2 aux courbes $dt_2^{(1)}$, dt_2. C. Q. F. T.

§ II. — APPLICATIONS.

147. PROBLÈME V. — *Étant données les mêmes conditions que dans le problème* IV, *les côtés du triangle* ABC *satisfont à*

la relation

$$(1)\qquad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\,\frac{\sin\alpha^{(1)}}{\sin\alpha_2^{(1)}}\,\frac{\sin\alpha_1^{(2)}}{\sin\alpha^{(2)}}=1;$$

trouver les relations qui existent entre les tangentes et les rayons de courbure des courbes de la série (s) *et de la série* (σ).

Tangentes. — Si l'on prend la différentielle logarithmique de l'équation (T) du n° **144** et qu'on représente par T_ι, T_α les deux membres, on a

$$T_\iota = T_\alpha;$$

or la différentielle logarithmique de l'équation (1) du présent numéro donne T_α nul; donc l'équation précédente se partage en deux, qui sont

$$(2)\qquad T_\iota = 0,\quad T_\alpha = 0.$$

La première de ces équations équivaut à la suivante :

$$(1')\qquad \frac{\iota_2}{\iota_1}\,\frac{\iota^{(1)}}{\iota_2^{(1)}}\,\frac{\iota_1^{(2)}}{\iota^{(2)}}=1.$$

Lorsque l'une des courbes de la série (s) est inconnue, l'équation (1) fait connaître la direction de la tangente à cette courbe, et lorsque la courbe inconnue est une de celles de la série (σ), l'équation (1′) fait connaître le point de contact.

Rayons de courbure. — Si l'on a égard aux équations de la série (s), les équations (2) se transforment; or, en reprenant les calculs du n° **144**, on reconnaît que l'expression de $\mathfrak{T}_2$ de l'équation (5) de ce numéro se compose de deux parties, l'une relative à l'équation T_ι et l'autre relative à l'équation T_α; en représentant par $\mathfrak{T}_2^{(\iota)}$, $\mathfrak{T}_2^{(\alpha)}$ ces deux parties, on aura

$$(3)\qquad \mathfrak{T}_2^{(\iota)} = \mathfrak{R}_2\left[\frac{1}{\iota_2}-\frac{1}{\iota_2^{(1)}}\right]+\frac{\sin[\alpha_2-\alpha_2^{(1)}]}{\sin\alpha_2\sin\alpha_2^{(1)}},$$

$$(4)\qquad \mathfrak{T}_2^{(\alpha)} = \frac{\sin[\alpha_2-\alpha_2^{(1)}]}{\sin\alpha_2\sin\alpha_2^{(1)}}+\frac{N_2N_1^{(1)}}{N_1R_2}\,\frac{\sin[\alpha^{(2)}-\alpha_1^{(2)}]}{\sin\alpha_1^{(2)}\sin\alpha^{(2)}},$$

et, par conséquent, l'équation (6) du même numéro se par-

tage en deux, qui sont

$$(6)\qquad \frac{\mathfrak{C}^{(\mathfrak{r})}}{N^{(1)}N_2} + \frac{\mathfrak{C}_1^{(\mathfrak{r})}}{N_1 N_2^{(1)}} + \frac{\mathfrak{C}_2^{(\mathfrak{r})}}{N_2 N_2^{(1)}} = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{\mathfrak{C}^{(\alpha)}}{N^{(1)}N_2} + \frac{\mathfrak{C}_1^{(\alpha)}}{N_1 N_2^{(1)}} + \frac{\mathfrak{C}_2^{(\alpha)}}{N_2 N_2^{(1)}} = 0.$$

Si l'on prend la différence de ces deux équations, on trouve la relation suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{N_2 N_2^{(1)}}\left\{\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_2} - \frac{1}{\mathfrak{r}_2^{(1)}}\right]\mathfrak{R}_2 - \frac{N_2 N_1^{(2)}}{N_1 R_2}\,\frac{\sin[\alpha^{(2)} - \alpha_1^{(2)}]}{\sin\alpha_1^{(2)}\sin\alpha^{(2)}}\right\} \\ &+ \frac{1}{N^{(1)}N_2}\left\{\left[\frac{1}{\mathfrak{r}^{(1)}} - \frac{1}{\mathfrak{r}^{(2)}}\right]\mathfrak{R} - \frac{N^{(1)}N_2}{N_2^{(1)}R}\,\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_1}\right\} \\ &+ \frac{1}{N_1 N_2^{(1)}}\left\{\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_1^{(2)}} - \frac{1}{\mathfrak{r}_1^{(2)}}\right]\mathfrak{R}_1 - \frac{N_1^{(2)}N^{(1)}}{N^{(2)}R_1}\,\frac{\sin[\alpha_2^{(1)} - \alpha^{(1)}]}{\sin\alpha^{(1)}\sin\alpha_2^{(1)}}\right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

laquelle donne un des rayons de courbure des courbes (s) ou (σ) lorsque les autres sont connus.

On déduit de cette équation le théorème suivant, qui n'a pas encore été remarqué par les géomètres :

Théorème I. — *Lorsque les sommets d'un polygone parcourent des courbes* (s) *et que ses côtés enveloppent d'autres courbes* (σ); *si, de plus, les angles que ces côtés forment avec les tangentes aux courbes* (s) *correspondantes satisfont à la relation* (1), *les rayons de courbure des courbes de la série* (σ) *et les courbures des courbes de la série* (s) *sont liés entre eux par une relation linéaire et homogène.*

Comme, d'après le théorème de Carnot, la relation (1) existe lorsque les courbes (s) sont des arcs d'une même conique, on en déduit aussi le théorème suivant :

Théorème II. — *Lorsque les côtés d'un polygone enveloppent des arcs d'une même conique, les rayons de courbure de ces arcs aux points de contact et les courbures des courbes parcourues par les sommets sont liés par une relation linéaire et homogène.*

148. Problème VI. — *Étant données les mêmes conditions que dans le problème* V, *les courbes* (s) *sont des droites* (*fig.* 59) B_1C_1, B_1A_1, A_1B *et deux des courbes enveloppes* (σ) *sont connues; déterminer la troisième.*

Soient σ_1, σ_2 les deux courbes connues, données par leurs équations naturelles; si nous conservons les mêmes notations que dans le n° **144** et qu'on introduise la condition que les courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ sont nulles, les équations (S) du n° **144** deviendront

$$(1)\quad ds = \frac{t_2\,d\varepsilon_2}{\sin\alpha_2} = \frac{t_1\,d\varepsilon_1}{\sin\alpha_1},\quad d\sigma = \frac{d[t^{(1)}\sin\alpha^{(1)}]}{\sin\alpha^{(1)}} = \frac{d[t^{(2)}\sin\alpha^{(2)}]}{\sin\alpha^{(2)}},\ \alpha_1 - \alpha_1^{(2)} = B_1;$$

$$(2)\quad ds_1 = \frac{t^{(1)}\,d\varepsilon}{\sin\alpha^{(1)}} = \frac{t_2^{(1)}\,d\varepsilon_2}{\sin\alpha_2^{(1)}},\quad d\sigma_1 = \frac{d[t_1^{(2)}\sin\alpha_1^{(2)}]}{\sin\alpha_1^{(2)}} = \frac{d(t_1\sin\alpha_1)}{\sin\alpha_1},\quad \alpha_2^{(1)} - \alpha_2 = C_1;$$

$$(3)\quad ds_2 = \frac{t_1^{(2)}\,d\varepsilon_1}{\sin\alpha_1^{(2)}} = \frac{t^{(2)}\,d\varepsilon}{\sin\alpha^{(2)}},\quad d\sigma_2 = \frac{d(t_2\sin\alpha_2)}{\sin\alpha_2} = \frac{d[t_2^{(1)}\sin\alpha_2^{(1)}]}{\sin\alpha_2^{(1)}},\quad \alpha^{(2)} - \alpha^{(1)} = A_1,$$

auxquelles il faut joindre la relation

$$(4)\qquad \frac{t_2}{\sin\alpha_2}\,\frac{t^{(1)}}{\sin\alpha^{(1)}}\,\frac{t_1^{(2)}}{\sin\alpha_1^{(2)}} = \frac{t_1}{\sin\alpha_1}\,\frac{t_2^{(1)}}{\sin\alpha_2^{(1)}}\,\frac{t^{(2)}}{\sin\alpha^{(2)}}$$

et les équations naturelles des deux courbes σ_1, σ_2, qui sont

$$(5)\qquad \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \varphi_1(\varepsilon_1),\quad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = \varphi_2(\varepsilon_2).$$

Si l'on porte ces valeurs de $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ dans les équations (2) et (3) qui contiennent ces éléments, et que l'on ait égard aux troisièmes équations des trois séries (S_i) du n° **144**, on obtiendra $t_1^{(2)}$, t_1 en fonction de ε_1 et t_2, $t_2^{(1)}$ en fonction de ε_2. Si l'on se porte au triangle ABC, les trois côtés de ce triangle sont

$$t_2 - t_2^{(1)},\quad t^{(1)} - t^{(2)},\quad t_1^{(2)} - t_1;$$

d'après ce que nous venons de dire, le premier est une fonction de ε_2 et le dernier une fonction de ε_1, que nous représentons par $f_2(\varepsilon_2)$, $f_1(\varepsilon_1)$; or, si l'on considère le triangle $A_1B_1C_1$

dont les trois côtés sont connus et représentés par a, b, c, en remarquant que chacun de ces côtés, par exemple le côté B_1C_1, est la somme de deux segments B_1A et AC_1, on obtiendra les trois équations suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - e_2)}{\sin B_1} f_1(\varepsilon_1) + \dfrac{\sin(\varepsilon_2 - e_1)}{\sin C_1} f_2(\varepsilon_2), \\ b = \dfrac{\sin(\varepsilon_2 - e)}{\sin C_1} f_2(\varepsilon_2) + \dfrac{\sin(\varepsilon - e_2)}{\sin A_1} [\iota^{(1)} - \iota^{(2)}], \\ c = \dfrac{\sin(\varepsilon - e_1)}{\sin A_1} (\iota^{(1)} - \iota^{(2)}) + \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - e)}{\sin B_1} f_1(\varepsilon_1). \end{cases}$$

Si l'on élimine $\iota^{(1)} - \iota^{(2)}$ entre ces deux dernières équations, on trouve la relation

$$(7)\quad \begin{cases} \left[b - \dfrac{\sin(\varepsilon_2 - e)}{\sin C_1} f_2(\varepsilon_2)\right] \sin(\varepsilon - e_1) \\ = \left[c - \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - e)}{\sin B_1} f_1(\varepsilon_1)\right] \sin(\varepsilon - e_2). \end{cases}$$

La première des équations (6) et cette dernière font connaître ε_2, ε_1 en fonction de ε; par conséquent les premières des équations (2) et (3) donnent $\iota^{(1)}$ et $\iota^{(2)}$ en fonction de cette dernière variable; on a donc les rayons tangentiels de la courbe inconnue σ.

Si dans l'équation de la série (1) qui contient $d\sigma$ on a égard aux valeurs de $\iota^{(1)}$ et de $\iota^{(2)}$, de ε_2, ε_1 en fonction de ε que nous venons de trouver, on obtiendra $d\sigma$ en fonction de cette dernière variable; on aura donc l'équation naturelle du lieu cherché.

Il est bon de remarquer que le calcul de $\iota^{(1)}$ et $\iota^{(2)}$ peut se faire aussi de la manière suivante : l'équation (4) donne le rapport de $\dfrac{\iota^{(2)}}{\iota^{(1)}}$ en fonction de ε_1 et par conséquent en fonction de ε; soit donc ce rapport

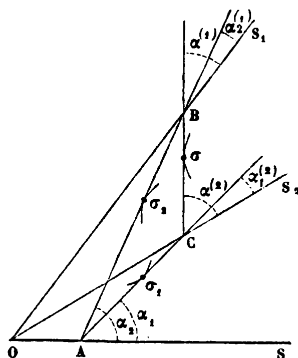
$$\frac{\iota^{(2)}}{\iota^{(1)}} = \frac{\psi_2(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)};$$

comme, par suite des deux dernières des équations (6), on a

$\iota^{(2)} - \iota^{(1)}$ en fonction de la même variable, il en résultera que $\iota^{(2)}$ et $\iota^{(1)}$ seront donnés en fonction de ε.

149. Problème VII. — *Les mêmes conditions étant données que dans le problème V, les courbes (s) sont des droites convergentes en un point O (fig. 61); trouver les relations qui lient les tangentes aux courbes (σ) et leurs rayons de courbure.*

Fig. 61.



Tangentes. — Lorsque le triangle $A_1 B_1 C_1$ devient infiniment petit, les segments de l'ordre (r) (n° 145) deviennent tous égaux entre eux, et la relation (T′) du même numéro n'est autre chose que la relation (1′) du n° 147; par conséquent la relation (1) du même numéro a aussi lieu. C'est d'ailleurs (*fig.* 61) ce que l'on voit directement, car les trois triangles OAB, OCB, OAC donnent la relation

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin\alpha_2^{(1)}}{\sin\alpha_2}, \quad \frac{OB}{OC} = \frac{\sin\alpha^{(2)}}{\sin\alpha^{(1)}}, \quad \frac{OC}{OA} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1^{(2)}},$$

et, en les multipliant membre à membre, on tombe sur la relation (1) du n° 147; il résulte de là que les points de contact des courbes de la série (σ) sont déterminés par les équations (1) ou (1′) du numéro précédent.

Rayons de courbure. — Les courbes (s) étant des droites,

les courbures $\left(\frac{1}{R}\right)$ deviennent nulles; par conséquent l'équation (7) du numéro **144** devient

$$(7')\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{R}_2}{N_2 N_2^{(1)}}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_2^{(1)}}\right)\\ &\quad+\frac{\mathfrak{R}}{N_1^{(1)} N_2}\left(\frac{1}{t^{(1)}}-\frac{1}{t^{(2)}}\right)+\frac{\mathfrak{R}_1}{N_1 N_2^{(1)}}\left(\frac{1}{t_1^{(2)}}-\frac{1}{t_1}\right)=0; \end{aligned} \right.$$

on déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si un polygone est tel que ses sommets parcourent des droites convergentes et que les côtés enveloppent des courbes* (σ), *il existe une relation linéaire entre les rayons de courbure de ces dernières courbes aux points de contact.*

Si deux des courbes (σ) sont des points, les deux rayons de courbure seront nuls; donc, par suite de l'équation (7'), le troisième rayon de courbure sera aussi nul; on en déduit le théorème connu :

THÉORÈME II. — *Si un polygone est tel que ses sommets parcourent des droites convergentes et que* $(n-1)$ *de ses côtés pivotent autour de* $(n-1)$ *points fixes, le* $n^{\text{ième}}$ *côté pivotera autour d'un point et réciproquement.*

150. PROBLÈME VIII. — *Les mêmes conditions étant données que dans le problème* IV, *les courbes* (σ) *sont des points situés en ligne droite; trouver les lois qui régissent les tangentes et les courbures.*

Conditions du problème. — De ce que les courbes (σ) sont des points situés en ligne droite, ils sont situés sur la transversale du triangle ABC; donc les segments (t) déterminés par cette transversale satisfont à l'équation (1') du n° **147**; donc les équations (1) du même numéro ont aussi lieu.

Tangentes. — Les tangentes aux courbes (s) sont telles que, lorsque toutes sont connues moins une, cette dernière est déterminée par la relation (1).

Courbures. — Puisque les équations (1) et (1') ont lieu simultanément, l'équation (7) du n° **147** a lieu, et, comme les

rayons de courbure des courbes (σ) sont nuls, elle devient

$$\frac{1}{N_2^{(1)}N_1R_2}\frac{\sin[\alpha^{(2)}-\alpha_1^{(1)}]}{\sin\alpha_1^{(2)}\sin\alpha^{(2)}} + \frac{1}{N_1^{(2)}N_2^{(1)}R}\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} + \frac{1}{N_2N_1^{(2)}R_1}\frac{\sin[\alpha_2^{(1)}-\alpha^{(1)}]}{\sin\alpha^{(1)}\sin\alpha_2^{(1)}} = 0.$$

Théorème I. — *Si un polygone est tel qu'en se déformant ses côtés pivotent autour de points situés en ligne droite et que ses sommets décrivent des courbes quelconques, il existe une relation linéaire et homogène entre les courbures de ces courbes aux points correspondants.*

Théorème II. — *Si un polygone est tel qu'en se déformant ses côtés pivotent autour de points situés en ligne droite, et que ses sommets moins un décrivent des lignes droites, le dernier sommet décrira aussi une ligne droite.*

151. *Conclusion générale du Chapitre.* — Les problèmes I, III et IV donnent la solution complète du mouvement d'une figure qui se déforme d'après une loi donnée. En effet, quelle que soit la loi de déformation, le mouvement de chaque point considéré comme intersection de deux courbes variables est déterminé de telle sorte que le mouvement de ce point se fait sur une courbe déterminée, puisque ce point ne peut pas parcourir deux chemins à la fois, et que les rapports des déplacements infiniment petits que les divers points effectuent simultanément se trouvent déterminés; par suite, on connaît aussi la courbe qu'enveloppe une droite qui joint deux de ces points et réciproquement.

Cela posé, prenons trois points A, B, C et les droites qui joignent ces trois points; d'après les conditions du mouvement de la figure, les courbes décrites par ces points et celles enveloppées par deux de ces droites sont connues. Les problèmes (I), (III) et (IV) permettront de connaître le mouvement de tel autre point de la figure et de telle autre diagonale. Ainsi les courbes parcourues par tous les points et les enveloppes de toutes les diagonales sont connues.

Du moment qu'à chaque instant tous les points de la figure

variable peuvent être connus, on peut à cet instant construire les courbes qui sont déterminées par cette condition de passer par deux, trois, quatre, cinq de ces points, etc., telles que droites, cercles, paraboles et coniques, courbes variables d'un instant à l'autre.

Les conclusions qu'il y aurait à tirer seraient très-nombreuses. Telle figure dont on connaît le mouvement de trois de ses points et les enveloppes de deux des diagonales joignant ces points fait connaître les courbes décrites par une infinité d'autres points qui, ne faisant pas partie de la figure variable, sont liés avec elle, tels que : intersections des tangentes et des normales, etc. L'un des trois problèmes qui servent de fondement à ce Chapitre suffira pour résoudre la question qui se présentera dans chaque cas particulier.

Il en résultera des théorèmes nombreux qu'il n'entre pas dans notre plan de développer, mais que le lecteur saura lui-même retrouver. C'est ainsi que, dans le cas du polygone relatif aux théorèmes du n° 149, non-seulement les côtés pivotent autour des points, mais encore les diagonales, et que, dans le cas du polygone relatif aux théorèmes du n° 150, non-seulement les sommets, mais les intersections des diagonales décrivent des lignes droites, etc.



CHAPITRE V.

DES COURBES CONJUGUÉES SUIVANT LEURS RAYONS VECTEURS.

§ I. — Principes.

152. Des courbes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ situées sur un même plan sont dites *conjuguées suivant leurs rayons vecteurs* lorsqu'une ligne droite *variable* autour d'un point O fixe détermine sur chacune de ces courbes des rayons vecteurs comptés à partir de ce point, lesquels satisfont à une relation *constante* entre ces rayons. Les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ déterminés par cette droite sur ces différentes courbes sont dits *points conjugués*.

Problème I. — *Connaissant la loi d'après laquelle n courbes sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs, trouver la loi d'après laquelle les tangentes à ces courbes aux extrémités de ces rayons sont conjuguées entre elles.*

Formules générales. — Soient les n courbes planes correspondantes rapportées à une origine O comme pôle et au même axe polaire Ox, et la loi suivant laquelle les rayons vecteurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont liés entre eux exprimée par l'équation

$$(r) \qquad F(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n) = a,$$

F étant une fonction quelconque et a une constante.

En conservant les notations employées dans le cours de cet Ouvrage et les lettres dénuées d'accent se rapportant à une courbe quelconque, on aura les relations

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{r\,d\omega}{ds}, \quad \cot\alpha = \frac{dr}{r\,d\omega};$$

$$(3) \qquad ds = R\,de, \quad d\omega = de - d\alpha.$$

Loi des tangentes. — Si entre la seconde des équations (2) et les équations (3) on élimine de et ds, on aura la relation

$$(4) \qquad d\alpha = \left(\frac{r}{\mathrm{R}\sin\alpha} - 1\right) d\omega,$$

et, en ayant égard à la troisième des équations (2),

$$(4') \qquad d\alpha = \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\sin\alpha}{r}\right)\frac{dr}{\cos\alpha};$$

or, si l'on différentie l'équation (r) et qu'on élimine les dr au moyen des n équations contenues dans le type représenté par la dernière des équations (2), on aura la relation

$$(n) \qquad \sum r\frac{d\mathrm{F}}{dr}\cot\alpha = 0,$$

le signe Σ s'étendant à une série de termes que l'on obtient en affectant successivement les lettres r et α de tous les indices, depuis 1 jusqu'à n.

Si l'on représente par A le point où le rayon vecteur r coupe la courbe s, par N le pied de la normale, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(n') \qquad \sum \mathrm{ON} \times \frac{d\mathrm{F}}{dr}\cos\alpha = 0.$$

L'équation (n) fait connaître la loi d'après laquelle sont conjuguées les normales aux n courbes, de telle sorte que, si toutes ces normales moins une sont connues, on connaît la dernière.

L'équation (n') donne la loi géométrique d'après laquelle on construit par la Géométrie une normale quand on connaît toutes les autres. Cette loi se traduit par le théorème suivant :

Théorème. — *Si n courbes sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs par la loi* $\mathrm{F} = a$, *et que dans la direction des rayons vecteurs on construise, à partir du pôle* O *et pour chaque courbe, des longueurs proportionnelles à la dérivée de* F *par rapport au rayon correspondant, la somme algébrique*

des triangles rectangles construits sur ces longueurs et les sous-normales correspondantes est toujours nulle.

153. Problème II. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure des n courbes.*

Prenons la différentielle de l'équation (n) et éliminons les dr au moyen des équations renfermées dans le type fourni par la troisième des équations (2), et les $d\alpha$ au moyen de celles fournies par le type (4), on aura l'équation

$$(\mathrm{R})\qquad \sum \frac{r_i^2 \frac{dF}{dr_i}}{R \sin^3\alpha_i} = \sum r_j \cot\alpha_j \cot\alpha_i \frac{d}{dr_j}\left(r_i \frac{dF}{dr_i}\right) + \sum \frac{r_i \frac{dF}{dr_i}}{\sin^2\alpha_i},$$

dans laquelle les indices i et j prennent toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à n.

Si F est une fonction telle que sa dérivée par rapport à l'une quelconque des variables r soit fonction de cette variable seule, les indices i et j sont les mêmes, et, par conséquent, on peut les supprimer; l'équation (R) peut donc s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$(\mathrm{R}')\qquad \sum \frac{r^2 \frac{dF}{dr}}{R \sin^3\alpha} = \sum \cot^2\alpha \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) + \sum r \frac{dF}{dr},$$

$$(\mathrm{R}'')\qquad \sum \frac{r^2 \frac{dF}{dr}}{R \sin^3\alpha} = \sum \frac{1}{\sin^2\alpha} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) - \sum r \frac{d}{dr}\left(r \frac{dF}{dr}\right).$$

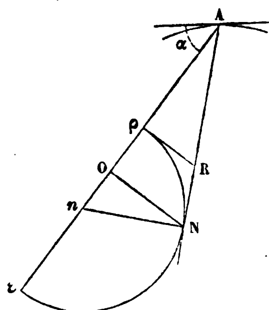
Si par le pied N de la normale on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en n du rayon vecteur, on aura

$$(\mathrm{R}''')\qquad \sum \frac{\frac{dF}{dr} \mathrm{N}^2}{R \sin\alpha} = \sum \mathrm{O}n \frac{d}{dr}\left(r \frac{dF}{dr}\right) + \sum \mathrm{A}n \frac{dF}{dr}.$$

L'une des formules précédentes fait connaître la loi d'après laquelle les rayons de courbure des n courbes sont conjugués.

154. ***Transformation géométrique des formules précédentes.*** — Soient (*fig.* 62) n le point pris sur le rayon qui se projette

Fig. 62.



en N sur la normale, ρ la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur et $A\iota$ la troisième proportionnelle à AN et $A\rho$, on aura

$$A\iota = \frac{\overline{AN}^2}{R \sin\alpha}, \quad On = r\cot^2\alpha, \quad An = \frac{r}{\sin^2\alpha};$$

donc, en ayant égard à ces équations, les formules (R), (R′), (R″) prennent la forme

$$(R) \quad \sum A\iota \frac{dF}{dr} = \sum On \frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) + \sum An \frac{dF}{dr},$$

$$(R_1) \quad \sum A\iota \left(\frac{dF}{dr}\right) = \sum \frac{On}{OA} \frac{d}{dr}\left(r^1\frac{dF}{dr}\right) + \sum OA \frac{dF}{dr},$$

$$(R_2) \quad \sum A\iota \left(\frac{dF}{dr}\right) = \sum \frac{An}{OA} \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) - \sum OA \frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right);$$

les deux premières peuvent s'écrire sous les formes binômes suivantes, où les traits supérieurs désignent des segments :

$$(\iota) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \overline{nr} \frac{dF}{dr} = \sum On \frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right), \\ &\sum \overline{Or} \frac{dF}{dr} = \sum \frac{On}{OA}\, d\left(r^2\frac{dF}{dr}\right). \end{aligned} \right.$$

Une quelconque de ces formules permettra de construire géométriquement le segment $A\iota$ de la $n^{\text{ième}}$ courbe lorsque les autres courbes seront connues, et de là on déduira le rayon de courbure de la $n^{\text{ième}}$ courbe qui sera AR.

Corollaire général. — Toute l'analyse précédente existe lorsque les rayons vecteurs sont comptés sur les génératrices d'une surface conique quelconque à partir du sommet O de ce cône, et que les n courbes données sont des courbes situées sur cette surface; la seule différence à signaler est que les rayons de courbure des courbes planes deviennent les rayons de courbure géodésique des courbes coniques par rapport au cône qui les contient.

155. *Formes particulières de la fonction* F. — 1° Si la fonction est une somme de fonctions ne dépendant chacune que d'un seul rayon vecteur, on aura

$$(r) \qquad F = \Sigma\varphi(r) = a;$$

l'équation (n) devient

$$[n] \qquad \Sigma r\varphi'(r)\cot\alpha = 0,$$

et les équations (R'), (R'') deviendront

$$[R'] \quad \sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum \cot^2\alpha \frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] + \sum r\varphi'(r),$$

$$[R''] \quad \sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] - \sum r\frac{d}{dr}[r\varphi'(r)].$$

2° Si la fonction F est homogène du degré m, on aura

$$mF = \sum r\frac{dF}{dr} = ma,$$

et, par suite, l'équation [R'] prendra la forme

$$[R'''] \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{r_i^2 \dfrac{dF}{dr_i}}{R\sin^3\alpha_i} &= \sum r_j \cot\alpha_j \cot\alpha_i \frac{d}{dr_j}\left(r_i\frac{dF}{dr_i}\right) \\ &\quad + \sum \cot^2\alpha_i\, r_i \frac{dF}{dr_i} + ma. \end{aligned} \right.$$

3° Si F étant homogène est de la forme $\Sigma\varphi(r)$, l'équation (R) devient

$$[R] \qquad \sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum \cot^2\alpha \frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] + ma,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\sum \frac{N^3\varphi'(r)}{Rr} = \sum \frac{ON}{OA} \frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] + ma.$$

Ces différentes expressions nous serviront à résoudre quelques questions inverses de celles que nous venons de poser.

156. *Cas particuliers.* — *Premier exemple.* — Soit la forme de F donnée par l'équation

$$(r) \qquad F = \nu_1 r_1^{m_1} + \nu_2 \nu_2^{m_2} + \ldots = \Sigma\nu r^m = a,$$

dans laquelle les ν sont des constantes différentes entre elles, ainsi que les m; on obtiendra, d'après le n° 152 et le n° 153, les équations suivantes :

$$(n') \qquad \Sigma m\nu r^m \cot\alpha = 0, \quad \Sigma m\nu\overline{ON}.r^{m-1} = 0;$$

$$(R) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{m\nu r^{m+1}}{R\sin^3\alpha} &= \sum m\nu(m+1)r^m \cot^2\alpha + \sum m\nu r^m \\ &= \sum \frac{m\nu(m+1)r^m}{\sin^2\alpha} - \sum m^2\nu r^m. \end{aligned} \right.$$

Les équations (ι) du n° 154 deviennent

$$(\iota) \quad \Sigma\overline{n\iota}\, m\nu r^{m-1} = \Sigma\overline{On}\, m^2\nu r^{m-1}, \quad \Sigma m\nu(\overline{n\iota} - m\overline{On})r^{m-1} = 0;$$

conséquemment on obtient

$$(R_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \overline{O\iota}\, m\nu r^{m-1} &= \sum \frac{On}{OA} m(m+1)\nu r^m \\ &= \sum \overline{On_1}\, m(m+1)\nu r^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

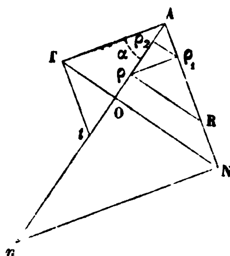
1° Soient les constantes m égales entre elles et ayant -1

pour valeur commune, l'équation (n') devient

$$(n'') \qquad \sum \frac{\nu \cot \alpha}{r} = 0.$$

Soit T (*fig.* 63) l'intersection d'une tangente quelconque

Fig. 63.



avec la perpendiculaire au rayon vecteur, on a

$$\frac{\text{OA}}{\text{OT}} = \cot \alpha;$$

par suite l'équation (n'') prend la forme

$$\sum \frac{\nu}{\text{OT}} = 0.$$

Donc la tangente à la $m^{\text{ième}}$ courbe est donnée par la division harmonique.

La formule (R) du présent numéro, en y remplaçant a par $\frac{1}{a}$, devient

$$\sum \frac{\nu}{\text{R} \sin^3 \alpha} = \frac{1}{a}.$$

Si l'on projette le centre de courbure d'une courbe sur le rayon vecteur, cette projection sur le rayon de courbure et cette dernière projection sur le rayon vecteur, en appelant P cette projection, on a

$$\sum \frac{\nu}{\text{P}} = \frac{1}{a}.$$

Donc le rayon de courbure d'une courbe, lorsque les rayons de courbure des autres courbes sont connus, se construit par les moyennes harmoniques.

Si $n-1$ courbes sont des droites, l'équation précédente donne

$$P = \nu a;$$

donc la $n^{ième}$ courbe est telle que la troisième des projections successives du rayon de courbure sur la direction du rayon vecteur est constante.

Si a est nul, la $n^{ième}$ courbe est une droite.

157. *Cas où les constantes sont égales à l'unité.* — 2° Si les constantes ν et m ont la même valeur commune égale à 1, on a

$$F = \Sigma r = a.$$

Pour réaliser la liaison des rayons vecteurs d'après la loi actuelle, il suffit de concevoir une règle rectiligne Om tournant autour d'un point fixe O, et n points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ assujettis à glisser sur cette règle, et dont les $n-1$ premiers sont de plus assujettis à glisser sur $n-1$ courbes; si l'on conçoit un fil de longueur constante fixé en O par une de ses extrémités, s'enroulant autour du premier point et de O, autour du second point et de O, et ainsi de suite jusqu'au $n^{ième}$ point, et fixé finalement par sa seconde extrémité en O; si une force exercée sur le $n^{ième}$ point tient ce fil constamment tendu pendant que la règle tourne autour de O, la courbe décrite par le $n^{ième}$ point A_n sera conjuguée des $n-1$ courbes données d'après la loi

$$\Sigma r = a;$$

on a les équations

$$(n) \qquad \Sigma r \cot\alpha = 0, \quad \Sigma \mathrm{ON} = 0;$$

donc *la somme algébrique des sous-normales est nulle,* ou, ce qui est la même chose, *le centre des moyennes distances des extrémités des normales par rapport au pôle* O *coïncide avec ce pôle.*

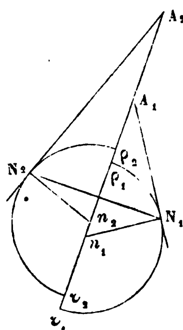
L'équation (R) du n° 156 devient

$$\sum \frac{r^2}{R \sin^3 \alpha} = \sum \frac{2r \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + a;$$

or les formules (ι) donnent (*fig.* 64)

$$\Sigma n\iota = \Sigma On,$$

Fig. 64.



conséquemment les formules (R_1) du même numéro deviendront

$$\sum O\iota = \sum \frac{On}{OA} \times 2OA = 2\sum On.$$

Si le nombre des courbes se réduit à deux, on a

$$(n) \qquad ON_1 + ON_2 = 0,$$

$$(R_1) \qquad \frac{O\iota_1 + O\iota_2}{2} = On_1 + On_2.$$

158. *Les constantes ν et m sont égales entre elles et à* — 2. — Dans ce cas, on a l'équation

$$F = \sum \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2};$$

l'équation (n) s'écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$\sum \frac{\cot\alpha}{r^2} = 0, \quad \sum \frac{1}{\text{OT} \times \text{OA}} = 0;$$

donc *la somme des inverses des aires des triangles rectangles, tels que* OAT, *qui ont pour côtés de l'angle droit la sous-tangente et le rayon vecteur, est nulle.*

L'équation (R) du n° 156 devient

$$(\text{R}) \qquad \sum \frac{1}{r(\text{R}\sin^3\alpha)} = -\sum \frac{\cot^2\alpha}{rr} + \sum \frac{1}{r^2},$$

que l'on peut écrire de la manière suivante, AI étant une moyenne proportionnelle entre r et $\text{R}\sin^3\alpha$:

$$\sum \frac{1}{\overline{\text{AI}}^2} = \sum \frac{1}{\overline{\text{OA}}^2} - \sum \frac{1}{\overline{\text{OT}}^2},$$

qui se construit d'après les règles du Chapitre I du Livre I.

159. *Les constantes m et ν sont égales entre elles et à* 2. — On a alors

$$\text{F} = \Sigma r^2 = a^2;$$

les équations (n) donnent

$$(n) \qquad \Sigma r^2 \cot\alpha = 0, \quad \Sigma \text{ON} \times \text{OA} = 0;$$

donc *la somme algébrique des triangles tels que* AON *est nulle.*

D'une autre part, les équations (R_1) du n° 156 donnent la relation

$$(\text{R}) \qquad \Sigma \text{O}i.\text{OA} = 3\Sigma \text{O}n.\text{OA}.$$

Les formules (n) et (R) donnent les lois d'après lesquelles les normales et les courbures sont conjuguées.

Si l'on multiplie par $\frac{d\omega}{2}$ l'équation F, que l'on intègre entre ω_0 et ω_1, et qu'on représente par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les aires cor-

respondantes, on a l'équation

$$\sum u = \frac{1}{2} a^2(\omega_1 - \omega_0);$$

donc *la somme des aires balayées par la ligne des rayons vecteurs depuis l'angle* ω_0 *jusqu'à* ω_1 *est égale à l'aire du secteur circulaire dont le rayon est a et l'angle* $(\omega_1 - \omega_0)$.

REMARQUE. — *Quelles que soient les positions de la transversale lorsqu'elle tournera dans les différentes positions d'un même angle, la somme des aires balayées est constante.*

160. *Deuxième exemple.* — Soit l'équation

$$F = \Sigma l r^\nu = la,$$

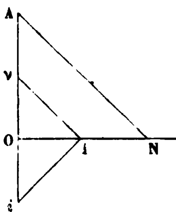
dans laquelle l indique les logarithmes népériens, l'équation (n) devient

$$(n) \qquad \sum \nu \cot\alpha = 0, \quad \sum \nu \frac{ON}{OA} = 0;$$

on déduit la proposition suivante :

Si l'on porte à partir de O (*fig.* 65) *et dans la direction* OA

Fig. 65.



une grandeur proportionnelle à ν, *et que par l'extrémité on mène une parallèle à la normale* AN, *la somme algébrique des segments tels que* OI *sera nulle.*

On obtient pour l'équation (R)

$$\sum \nu \left(\frac{r}{\mathrm{R} \sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = 0,$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(\mathrm{R}) \qquad \sum \frac{\nu r}{\sin^3 \alpha} \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{N}} \right) = 0.$$

Prenez (*fig.* 66) *le conjugué harmonique du point* A *par*

Fig. 66.

rapport au symétrique $\mathcal{N}$ *de* N *et par rapport à* R. Soit $\mathcal{A}$ ce point, on a

$$\frac{2}{\mathrm{A}\mathcal{A}} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathcal{N}};$$

par suite, $\mathrm{A}\mathcal{A}_3$ étant la troisième projection de $\mathrm{A}\mathcal{A}$ par rapport aux deux côtés de l'angle OAN, l'équation précédente devient

$$\sum \frac{2\nu r}{\mathrm{A}\mathcal{A} \times \sin^3 \alpha} = 2 \sum \frac{\nu r}{\mathrm{A}\mathcal{A}_3} = 2 \sum \frac{\nu \times \mathrm{AO}}{\mathcal{A}_3 \mathrm{A}} = 0.$$

Par le point A élevons une perpendiculaire sur le rayon vecteur; sur cette perpendiculaire prenons AV égal à ν, calculons AX quatrième proportionnelle aux droites $\mathrm{A}\mathcal{A}_3$, AO

et AV, nous aurons la relation

$$\Sigma AX = 0,$$

ce qui démontre que, si l'on projette toutes les longueurs telles que AX sur ON, la somme des segments positifs sera égale à la somme des segments négatifs.

Cela donne la construction du rayon de courbure d'une courbe lorsque l'on connaît les tangentes et les rayons de courbure des autres courbes.

Si toutes les courbes moins la $n^{\text{ième}}$ sont des droites, on aura l'équation

$$\frac{\nu_n r_n}{R_n \sin^3\alpha_n} = \sum \frac{\nu}{\sin^2\alpha}.$$

161. Problème III. — *Quelle doit être la forme de la fonction* φ *de l'équation* [R] *du* n° **155**, *dans laquelle* **F** *est homogène, pour que les rayons de courbure soient conjugués entre eux d'après la loi*

$$\sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = ma.$$

L'équation [R] du n° **155** montre qu'on satisfait à cette relation si chacune des fonctions φ satisfait à l'équation de la forme

$$\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] = 0;$$

de là on déduit, k et l étant des constantes, les équations

$$r^2\varphi'(r) = k, \quad \varphi(r) = -\frac{k}{r} + l;$$

donc il ne faut conserver que le premier terme, parce que la fonction φ doit être homogène.

Problème IV. — *Quelle doit être la forme de la fonction* φ, *monôme du degré m, pour que les rayons de courbure soient conjugués entre eux d'après la loi*

$$\sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)],$$

ou bien d'après la loi

$$\sum C\left(\frac{1}{R\sin^2\alpha} - \frac{1}{r}\right) = 0,$$

dans laquelle les coefficients C *sont constants.*

1° Remarquons que l'équation [R′] du n° 155 peut s'écrire, en observant que $a = \Sigma\varphi(r)$, sous la forme suivante :

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^2\alpha} &= \sum\left\{-\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] + m\varphi(r)\right\}\\ &\quad + \sum \frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)]; \end{aligned}\right.$$

il faudra donc que chacune des fonctions φ satisfasse à l'équation donnée par le type

$$\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] = m\varphi(r).$$

Cette équation différentielle est du second ordre; on l'intégrera si l'on pose $\varphi(r) = r^n$, n étant une arbitraire qu'il faut déterminer, de manière que l'équation précédente soit satisfaite; la condition à laquelle on arrive est

$$n(n+1) = m,$$

d'où l'on tire

$$n = -\frac{1 \pm \sqrt{1+4m}}{2};$$

l'intégrale générale sera donc, A et B étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration,

$$\varphi(r) = A r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4m}} + B r^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4m}},$$

ou bien, en posant $\sqrt{1+4m} = 2k$,

$$\varphi(r) = \frac{A r^k + B r^{-k}}{\sqrt{r}}.$$

Suivant que l'on donne à m les valeurs suivantes, on trouve les formes correspondantes de la fonction $\varphi(r)$:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } m = 0, && \varphi(r) = A + \frac{B}{r};\\
&\text{si } m = 2, && \varphi(r) = Ar + \frac{B}{r^2};\\
&\text{si } m = 12, && \varphi(r) = Ar^2 + \frac{B}{r^3};\\
&\text{si } m = 24, && \varphi(r) = Ar^3 + \frac{B}{r^4};\\
&\text{si } m = 40, && \varphi(r) = Ar^4 + \frac{B}{r^5};\\
&\text{si } m = 60, && \varphi(r) = Ar^5 + \frac{B}{r^6};
\end{aligned}$$

mais il ne faudra conserver que l'un des deux termes, parce que la fonction φ doit être monôme.

2° Supposons toujours que F ne soit pas homogène, mais la somme de fonctions monômes φ, et soit $F = \Sigma\varphi(r)$; l'équation (R) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum r\frac{d}{dr}[r\varphi'(r)]\cot^2\alpha + \sum\frac{r\varphi'(r)}{\sin^2\alpha},$$
$$\sum \frac{r^2\varphi'(r)}{R\sin^3\alpha} = \sum \cot^2\alpha\,\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] + \sum r\varphi'(r),$$

ou bien

$$\sum r^2\varphi'(r)\left\{\frac{1}{R\sin^3\alpha} - \cot^2\alpha\,\frac{d}{dr}\log[r^2\varphi(r)] - \frac{1}{r}\right\} = 0;$$

or, si l'on pose nul le facteur de $\cot^2\alpha$, on a l'équation

$$\frac{d}{dr}\log[r^2\varphi'(r)] = \frac{\dfrac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)]}{r^2\varphi(r)} = 0.$$

Il vient par l'intégration, C, C_1 étant des constantes arbitraires,

$$r^2\varphi'(r) = C, \quad \varphi(r) = C_1 - \frac{C}{r},$$

et, conséquemment, l'équation des rayons de courbure devient

$$\sum C\left(\frac{1}{R\sin^3\alpha} - \frac{1}{r}\right) = 0.$$

§ II. — Applications.

Transformations simples.

162. *Transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.* — *Définition.* — Si deux points M, M' sont tels que le rectangle de leurs distances à un pôle fixe O soit égal à un carré donné $\overline{OA}^2$, de telle sorte que

$$OM \times OM' = \overline{OA}^2,$$

ces deux points sont transformés l'un de l'autre par rayons vecteurs réciproques. Cette relation est un cas particulier de celle qui a été donnée au n° 160, puisqu'il suffit de passer des nombres aux logarithmes. Lorsque le point M décrit une figure C, le point M' décrit une figure C' qui est la transformée de C.

Construction du point transformé d'un point donné M. — Menez la polaire du point M par rapport au cercle de rayon OA, elle coupera le rayon vecteur OM en un point M' qui sera le transformé de M.

Formules de transformation. — Soient x, y, z, x', y', z' les coordonnées des points M et M', r et r' les rayons vecteurs de ces points, on a

$$r = \frac{a^2}{r'}, \quad x = \frac{a^2}{r'^2}x', \quad y = \frac{a^2}{r'^2}y', \quad z = \frac{a^2}{r'^2}z';$$

$$r' = \frac{a^2}{r}, \quad x' = \frac{a^2}{r^2}x, \quad y' = \frac{a^2}{r^2}y, \quad z' = \frac{a^2}{r^2}z.$$

163. *Principes de transformation.* — 1° Deux courbes transformées l'une de l'autre font, avec le rayon vecteur en leurs points transformés, des angles supplémentaires, situés dans un même plan passant par l'origine et les deux tangentes en ces points.

En effet, dans le cas de deux courbes C et C', la formule (n) du n° 160 donne

$$\cot\alpha + \cot\alpha' = 0;$$

donc les deux angles α et α' sont supplémentaires.

2° Les tangentes aux deux courbes en leurs points réciproques se rencontrent en un point qui appartient au plan normal au rayon vecteur au point qui divise en deux parties égales le segment terminé par les deux points réciproques. Les plans normaux à ces deux courbes se coupent sur le même plan.

3° Les plans tangents à deux surfaces réciproques en leurs points réciproques se coupent sur le plan normal au milieu du segment qui joint ces deux points. Les normales se coupent sur le même plan.

4° Si deux courbes C_1, C_2 se coupent sous un angle, les transformées de ces courbes se couperont sous le même angle. En effet, les trièdres formés aux points d'intersection par les tangentes aux courbes et le rayon vecteur sont symétriques (1°).

5° Si deux surfaces S_1, S_2 se coupent sous un angle, les transformées de ces surfaces se couperont sous le même angle. En effet, en menant en deux points réciproques des intersections des éléments normaux à ces intersections situées dans les surfaces, etc., ces éléments seront réciproques deux à deux; donc deux éléments qui ont une extrémité commune formeront un angle égal à celui des deux autres éléments. Donc, etc.

6° Les lignes de courbure d'une surface ont pour transformées les lignes de courbure de la surface transformée (5°).

7° Si une courbe est plane, sa transformée n'est pas plane. Cela résulte de (2°).

8° La transformée d'une droite est un cercle situé dans le

plan du pôle et de la droite; ce cercle passe par ce pôle et est tangent à la parallèle menée du pôle à la droite donnée.

En effet, si l'on opère dans le plan du pôle et de la droite, on a par suite de la formule (R) du n° 160, dans le cas de deux courbes situées dans ce plan, la formule

$$\frac{N'}{R'} + \frac{N}{R} = 2;$$

or, si l'une de ces courbes C est une droite, son rayon de courbure est infini, et, conséquemment,

$$N' = 2R'.$$

Donc la courbe C′ rapportée au pôle O est telle que le rayon de courbure est moitié de la normale; elle est donc un cercle passant par le point O. Donc le diamètre de ce cercle et la perpendiculaire à la droite sont réciproques.

9° La transformée d'un plan est une sphère passant par le pôle et tangente en ce point à un plan parallèle au plan donné : cela résulte de (8°). Le diamètre et la perpendiculaire au plan sont réciproques.

10° La transformée d'un cercle situé dans un plan qui passe par le pôle est un cercle situé dans le même plan, ces deux cercles ayant pour tangentes communes deux droites issues du point O.

En effet la formule (R) du n° 160 peut s'écrire sous la forme

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = 2 \sin \widehat{rds};$$

or, si la première courbe est un cercle tel que la distance de son centre à l'origine est A, le triangle OCM donne

$$A^2 = r^2 + R^2 - 2rR \sin \widehat{rds};$$

éliminant le sinus entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{1}{R'} = \frac{R}{rr'} - \frac{A^2}{rr'R} = \frac{1}{rr'}\left(R - \frac{A^2}{R}\right),$$

et le second membre est constant, puisque $rr' = a^2$. Donc, etc. La seconde partie de l'énoncé est évidente.

11° La transformée d'une sphère est une sphère, et ces deux sphères sont inscrites dans le cône qui a son sommet au pôle. Cela résulte de (10°). Si deux sphères passent, la première par quatre points et la seconde par quatre points réciproques, elles sont réciproques. Étant donnés une sphère et un point de la sphère réciproque, il est facile de construire cette sphère.

12° La transformée d'un cercle quelconque est un autre cercle. En effet, le cercle C peut être considéré comme l'intersection de deux sphères s, s_1. Donc la courbe C′ sera l'intersection des deux sphères transformées s', s'_1. Donc, etc.

13° Les deux cercles C, C′ sont donnés par deux sections antiparallèles de la surface conique qui passe par le pôle O et l'un de ces cercles.

En effet, le plan du cercle C est perpendiculaire à un plan diamétral OMN de ce cône; les deux sphères s et s_1 du numéro précédent sont perpendiculaires à ce plan. Donc (5°) les sphères transformées coupent le même plan orthogonalement, et, par suite, le plan du cercle C′ est perpendiculaire au même plan diamétral. Donc, etc.

14° Les deux cercles C, C′ réciproques se trouvent sur une même sphère dont le centre est situé sur le plan diamétral perpendiculaire aux plans de ces cercles (13°).

15° Les cercles osculateurs de deux courbes réciproques C et C′ en deux points réciproques sont réciproques. En effet, le cercle osculateur de C en un point M passe par trois points infiniment voisins, et le cercle osculateur qui passe par les trois points réciproques de la courbe C′ est osculateur de cette courbe et réciproque (12°) du premier cercle. Cela donne le cercle osculateur et aussi le plan osculateur de la transformée d'une courbe.

16° Les sphères osculatrices de deux courbes réciproques en deux points réciproques sont réciproques (même démonstration). Ceci donne la sphère osculatrice de la transformée d'une courbe.

17° Trois surfaces passent par le cercle osculateur d'une

courbe : le plan osculateur P, la sphère osculatrice S et la sphère σ qui, passant par le pôle O, contiendrait ce cercle; les trois surfaces transformées sont P′, sphère qui passe par le pôle O et le cercle osculateur de la courbe C′ réciproque de C; la sphère S′ réciproque de S, et par conséquent osculatrice de C′ (16°), et le plan réciproque de σ. Donc on obtient le plan osculateur d'une transformée C′ en construisant la transformée de σ.

18° La surface lieu des intersections des plans osculateurs (P) a pour réciproque la surface lieu des intersections des sphères (P′), et la surface lieu des intersections des sphères (σ) a pour réciproque la surface lieu des intersections des plans osculateurs (σ') de la courbe réciproque C′.

19° Les plans normaux (N) à une courbe C ont pour réciproques des sphères (N′) normales à C′; le lieu des intersections des plans normaux est une surface D qui a pour réciproque une surface D′ lieu des intersections des sphères (N′).

Le lieu E des sphères passant par le pôle O et coupant orthogonalement la courbe C a pour réciproque le lieu E′ des plans normaux de la transformée C′.

20° Une longueur MN qui joint deux points M, N et la longueur M′N′ qui joint les deux points réciproques sont entre elles comme le carré du rayon du cercle A est au rectangle des rayons vecteurs OM, ON,

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M'N'}} = \frac{a^2}{\mathrm{OM}.\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{OM'}.\mathrm{ON'}}{a^2}.$$

Ce principe permet de passer des propriétés métriques d'une figure aux propriétés métriques correspondantes de la figure réciproque.

21° Si la propriété métrique d'une figure est projective, elle existera aussi pour la figure réciproque.

22° Les distances p_0 et p d'un plan à l'origine et à un point sont entre elles comme les carrés du rayon vecteur r' du réciproque du point et de la tangente $\mathfrak{E}'$ menée par ce point réciproque à la sphère réciproque du plan, de sorte que l'on a

$$\frac{p_0}{p} = \frac{r'^2}{\mathfrak{E}'^2}.$$

23°. Les tangentes T_1 et $\mathfrak{T}$, menées de l'origine et d'un point à une sphère, sont entre elles comme le rayon vecteur du réciproque de ce point est à la tangente menée de ce point réciproque à la sphère réciproque de la sphère donnée.

Ces deux principes permettent d'exprimer la propriété métrique d'un lieu réciproque d'un lieu jouissant d'une propriété métrique connue.

164. *Transformation des surfaces du second degré homofocales.* — Soient trois surfaces du second degré homofocales S, S′, S″; les intersections des deux dernières avec la première déterminent sur celle-ci deux lignes de courbure, de sorte que, si l'on fait varier les axes de ces deux dernières, elles détermineront le réseau complet des lignes de courbure de la première surface. Or sur chacun des axes de celle-ci se trouvent deux sphères doublement tangentes à la surface en deux ombilics, symétriques par rapport à cet axe, et, d'après un théorème que nous avons fait connaître (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVIII, p. 886; t. LII, p. 1150), les surfaces du second degré de révolution inscrites ou circonscrites à la fois à deux sphères d'un même couple, déterminent sur la surface S le réseau complet des lignes de courbure.

Prenons maintenant la figure transformée; les trois surfaces Σ, Σ', Σ'', transformées de S, S′, S″, sont du quatrième degré; elles se coupent orthogonalement, et deux d'entre elles déterminent sur la troisième deux lignes de courbure, l'une de la première série et l'autre de la seconde série.

Comme les deux sphères auront pour transformées des sphères et que la surface du second degré de révolution aura pour transformées une surface engendrée par le mouvement d'une sphère de rayon variable, la série des surfaces de cette famille déterminera sur celle des surfaces (Σ) que l'on considère le réseau complet des lignes de courbure de cette surface.

De plus, comme pour chaque ligne de courbure de la surface S la somme ou la différence des tangentes menées d'un de ses points aux deux sphères d'un couple est constante, sui-

vant que cette ligne de courbure appartient aux lignes de courbure de la première série ou de la seconde, pour chaque ligne de courbure de la surface Σ, la somme ou la différence des tangentes menées d'un de ses points aux deux transformées des sphères (n° 163) sera proportionnelle à la distance de ce point à un point fixe, suivant que la ligne de courbure appartiendra à la première ou à la seconde série.

165. *Transformation du cône du second degré.* — Joignons le sommet s du cône au centre O de transformation par une droite et faisons passer par cette droite un plan, il coupera le cône suivant deux droites passant par s; ces deux droites se transformeront en cercles passant par O et par le point s' réciproque de s, et comme cela a lieu dans toutes les positions du plan et que les deux droites rencontrent tous les cercles des deux sections antiparallèles, lesquels, dans la figure transformée, restent des cercles, il en résulte que la surface transformée du cône est engendrée par un cercle de rayon variable passant par deux points fixes et rencontrant un cercle de grandeur et de position donnée, etc.

Cela posé, si nous inscrivons un trièdre au cône et qu'on représente par p, p_1, p_2 les distances d'un point du cône aux trois faces du trièdre, on a, α, α_1, α_2 étant des constantes, la relation

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}=0.$$

Donc, si nous considérons trois surfaces sphériques passant par O et s', et qu'on représente par t, t_1, t_2 les tangentes menées d'un point de la transformée du cône à ces trois sphères, et par B, B_1, B_2 trois constantes, on aura, pour la surface transformée, la relation

$$\frac{B}{t^2}+\frac{B_1}{t_1^2}+\frac{B_2}{t_2^2}=0.$$

Si l'on mène un plan tangent à ces trois sphères, en représentant par r, r_1, r_2 les distances d'un point de la courbe d'intersection aux trois points de contact, on aura cette propriété : l'intersection de la surface par un plan est telle, qu'il

existe dans ce plan trois pôles par rapport auxquels un point quelconque de la courbe jouit de la relation

$$\frac{B}{r^2} + \frac{B_1}{r_1^2} + \frac{B_2}{r_2^2} = 0.$$

Il est inutile de pousser plus loin les applications de ce genre de transformation, qui a été l'objet de nombreuses et intéressantes recherches.

Transformations doubles.

166. *Transformation des figures par normales à la sphère réciproques.* — *Définition.* — Soit une sphère dont le centre est en un point donné O et dont le rayon est d'une longueur donnée M; si d'un point a appartenant à une figure on abaisse une normale à la sphère, elle la rencontre en deux points diamétralement opposés α, α_1; si l'on choisit sur cette normale un point A satisfaisant à la relation $a\alpha \times A\alpha = M^2$, le point A est dit le transformé du point a par normales à la sphère M, réciproques suivant le carré du rayon. Si l'on choisit sur la même normale un second point A_1, satisfaisant à la relation $a\alpha_1 \times A_1\alpha_1 = \overline{M}^2$, le point A_1 sera un second point transformé du point a. Ainsi, dans ce système, chaque point de la figure donnée a deux points correspondants dans la figure transformée; c'est pour cela que ce genre de transformation est appelé *double*. Ces deux points sont dits conjugués entre eux.

Construction des deux points transformés R, R_1 *d'un point donné* r. Si l'on décrit du centre O une sphère de rayon 2M, et que l'on appelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ ses intersections avec le rayon vecteur Or, il est visible que l'on aura les deux relations qui rentrent dans le cas du n° 156,

$$\frac{2}{O\mathcal{A}} = \frac{1}{Or} + \frac{1}{OR}, \quad \frac{2}{O\mathcal{A}_1} = \frac{1}{Or} + \frac{1}{OR_1},$$

un rayon vecteur étant positif ou négatif, suivant qu'on le compte d'un côté ou de l'autre à partir du point O. De là on déduit les propositions suivantes :

1° *Tout point* R *transformé d'un point* r *est le conjugué harmonique de ce point par rapport au centre* O *et au pied de la normale* $\mathcal{N}$ *abaissée du point* r *sur une sphère de rayon* 2M.

2° *Les deux points transformés* R, R_1 *d'un point* r, *ou leurs symétriques par rapport au point* O, *sont conjugués harmoniques entre eux par rapport au point* O *et au point où la normale, abaissée du point* r, *rencontre la sphère de rayon* M.

On déduit de ce qui précède la détermination d'un point transformé R par une construction unique qui ne souffre aucune exception, quelle que soit la position de ce point.

On déduit également une discussion facile des positions des points R, R_1, lorsque le point r prend toutes les positions possibles.

3° *Tout point* r *situé sur la sphère de rayon* 2M *est lui-même l'un de ses transformés.*

167. *Formules de transformation.* — Soient x, y, z, X, Y, Z les coordonnées des points r et R. Représentons par r, R, M les distances Or, OR, OM. Nous aurons

$$r = \frac{MR}{R - M}, \quad x = \frac{MX}{R - M}, \quad y = \frac{MY}{R - M}, \quad z = \frac{MZ}{R - M};$$

$$R = \frac{Mr}{r - M}, \quad X = \frac{Mx}{r - M}, \quad Y = \frac{My}{r - M}, \quad Z = \frac{Mz}{r - M}.$$

Principes de transformation. — 1° Une surface du degré m a pour transformée une surface du degré $2m$.

2° La transformée d'un plan est une surface du second ordre de révolution dont le foyer est en O, et dont le plan directeur est le symétrique du plan donné par rapport au point O. Le plan mené par le point O, parallèlement au plan donné, partage la surface en deux régions, dont l'une contient les transformées de première espèce et l'autre les transformées de seconde espèce des points du plan.

Suivant que le plan est extérieur, tangent ou intérieur à la sphère de rayon M, la surface est un ellipsoïde, un paraboloïde, ou un hyperboloïde à deux nappes.

Tout plan qui passe par le point O est lui-même son transformé.

Deux plans quelconques ont pour transformées deux surfaces de révolution du second ordre ayant même foyer, et dont les plans directeurs font entre eux le même angle que les plans donnés.

3° La transformée d'une droite est une conique dont le foyer est en O et dont la directrice est la symétrique de la droite donnée par rapport au point O. La parallèle menée par le point O à la droite partage la conique en deux arcs, dont l'un contient les points transformés de première espèce et dont l'autre contient les points transformés de seconde espèce.

Toute droite passant par le point O est elle-même sa transformée.

Deux droites quelconques ont pour transformées deux coniques de même foyer et dont les directrices font entre elles l'angle des deux droites données.

4° Une courbe située sur une surface a pour transformée la courbe d'intersection de la transformée de la surface avec le cône qui a son sommet en O et qui passe par la courbe donnée.

168. *Passage des propriétés d'une figure à celles de la transformée.* — 1° Si la propriété est descriptive dans la figure donnée, elle existe aussi dans la figure transformée, pourvu que l'on remplace les lignes par des arcs d'ellipse correspondants.

C'est ainsi que les théorèmes de Pascal et de Brianchon sur l'hexagone inscrit et circonscrit à une conique sont vrais pour l'hexagone curviligne inscrit ou circonscrit à la transformée de la conique, les côtés et les diagonales étant des arcs de conique situés sur la surface de révolution du second degré transformée du plan de l'hexagone donné, les plans de ces arcs passant par le foyer de la surface.

2° Si la propriété est métrique et projective, elle existera dans la figure transformée; mais tout segment, tel que ab, de la figure donnée sera remplacé dans la relation projective par un triangle qui a pour base la distance AB des deux points transformés des points a et b, et pour sommet le point O.

C'est ainsi que, le théorème de Désargues sur l'involutio

des points d'intersection d'une transversale avec les côtés et les diagonales d'un quadrilatère complet donnant la relation projective

$$ab.cb'.a'c' = a'b'.ac.bc',$$

a, a'; b, b'; c, c' étant les points situés sur les côtés opposés ou sur les diagonales, on aura dans la figure transformée, en représentant par les mêmes lettres majuscules les points transformés, la relation suivante (tr. étant l'abréviation du mot aire du triangle) :

$$(\text{tr.AOB}) \times (\text{tr.COB}') \times (\text{tr.A}'\text{OC}')$$
$$= (\text{tr.A}'\text{OB}') \times (\text{tr.AOC}) \times (\text{tr.BOC}').$$

3° Si la propriété est métrique et non projective, la transformation se fera en remarquant que, pour un segment tel que ab de la figure donnée, p étant la perpendiculaire abaissée du point O sur ab, et α et β les points d'intersection des rayons vecteurs Oa, Ob avec la sphère de rayon M, on a la formule de transformation

$$\frac{ab.p}{\text{M}^2} = \frac{\text{tr.AOB}}{\alpha\text{A}.\beta\text{B}}.$$

Ainsi soit l'ellipse dont les foyers sont a et b, et dont n est un point quelconque, si $2k$ est une constante, on a la relation

$$an + bn = 2k;$$

si l'on représente par p et q les perpendiculaires abaissées du point O sur an et bn, et ν le point où le rayon On rencontre la sphère M, on a la relation

$$\frac{\text{tr.AON}}{p.\alpha\text{A}} + \frac{\text{tr.BON}}{q.\beta\text{B}} = 2k.\text{N}\nu.$$

Tangentes. — Soit I le point d'intersection des tangentes au point r et au point réciproque R de la courbe donnée et de la transformée; soit i la projection du point I sur le rayon vecteur Or, on a, d'après l'équation (n'') du n° 156, la rela-

tion

$$\frac{\mathrm{O}r}{\mathrm{OR}} = \frac{ir}{\mathrm{IR}}.$$

On en déduit la proposition suivante : *La projection du point d'intersection de deux tangentes en deux points correspondants r et R d'une courbe et de sa transformée est le conjugué harmonique du point O par rapport aux points r et R.* Ce point n'est autre chose que le point $\mathcal{A}$ d'intersection du rayon vecteur $\mathrm{O}r$ avec la sphère de rayon $2\mathrm{M}$.

On obtient par là la règle suivante : *Pour construire les tangentes des courbes transformées d'une courbe donnée aux points R, R_1 correspondants du point r, menez la tangente au point r et les plans tangents à la sphère $2\mathrm{M}$ aux points $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$, où le rayon vecteur rencontre cette sphère; par les points d'intersection I, I_1 de ces deux plans et de la tangente, tirez les lignes IR, $\mathrm{I}_1\mathrm{R}_1$, ces deux droites seront les tangentes des deux courbes transformées.*

Ces deux tangentes se rencontrent en un point N situé sur une perpendiculaire au point O au rayon vecteur $\mathrm{O}r$, et sur la symétrique par rapport au point O de la tangente en r à la courbe donnée; donc, si dans la construction précédente on joignait les points I, I_1 au point N, on aurait à la fois les points R, R_1 correspondants du point r et les tangentes en ces points aux deux courbes transformées.

La construction du plan tangent à une surface transformée d'une surface donnée se fait de la même manière.

Rayon de courbure géodésique. — On appelle *courbure géodésique* d'une courbe située sur une surface la projection de la courbure de la courbe sur le plan tangent à cette surface. Soient ρ et $\mathcal{R}$ les rayons de courbure géodésique de la courbe et de sa transformée aux points correspondants r, R, ces rayons de courbure géodésique se rapportant à la surface conique qui contient ces deux courbes et dont le sommet est en O; soient π, $\mathcal{P}$ les projections triples successives de ces rayons de courbure, de telle sorte que l'on ait

$$\pi = \rho \cos^3(r, \rho), \quad \mathcal{P} = \mathcal{R} \cos^3(\mathrm{R}, \mathcal{R}),$$

on aura, par suite de l'équation (R) du n° 156, les deux relations harmoniques

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\varphi}=\frac{2}{O\mathcal{L}},\quad \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\varphi_1}=\frac{2}{O\mathcal{L}_1}.$$

Ainsi la proportion harmonique qui a donné les points correspondants, les tangentes correspondantes, donne aussi d'une manière analogue les rayons de courbure géodésique correspondants.

Des arcs d'une courbe algébrique conjugués entre eux.

169. *Forme de l'équation d'une surface algébrique du degré m rapportée à son rayon vecteur mené d'un point donné* O.

Soit $f=0$ l'équation de la surface rapportée à des coordonnées rectangles rectilignes; si l'on appelle r le rayon vecteur mené du point $O(x', y', z')$ jusqu'à un point (x, y, z) de la surface, et λ, μ, ν les angles qu'il forme avec les trois axes, on a

$$x=x'+r\cos\lambda,\quad y=y'+r\cos\mu,\quad z=z'+r\cos\nu,$$

et, conséquemment, si l'on pose

$$\Delta=\left(\cos\lambda\frac{d}{dx}+\cos\mu\frac{d}{dy}+\cos\nu\frac{d}{dz}\right),$$

on aura les deux équations symboliques, en représentant par f_1 la valeur de f pour x', y', z',

$$(f)\qquad f_1+r\Delta f_1+\frac{r^2}{1.2}\Delta^2 f_1+\ldots+\frac{r^m}{1.2\ldots m}\Delta^m f_1=0,$$

$$(f_1)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{r^m}+\frac{\Delta f_1}{f_1}\frac{1}{r^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\Delta^2 f_1}{f_1}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{1}{1.2.3}\frac{\Delta^3 f_1}{f_1}\frac{1}{r^{m-3}}+\ldots\\&\qquad+\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{\Delta^m f_1}{f_1}=0,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les exposants de Δ indiquent l'ordre des différentiations.

Soit ψ l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe des z, et θ l'angle que la projection de ce rayon fait avec l'axe des x, on a

$$\Delta = \left(\sin\psi\cos\theta\frac{d}{dx} + \sin\psi\sin\theta\frac{d}{dy} + \cos\psi\frac{d}{dz}\right).$$

L'équation (f) sera celle de la surface rapportée à des coordonnées polaires issues du point O.

170. *Surfaces résultantes.* — THÉORÈME I. — *Si du point* $O(x', y', z')$ *on mène une sécante à une surface algébrique* $f = 0$ *du degré* m, *et qu'on prenne sur cette sécante à partir du point* O *un segment* v *qui soit lié avec les* m *segments* r *déterminés par la surface, par la relation*

$$(v) \qquad \frac{k^n}{v^n} = \sum \frac{1}{r^n},$$

dans laquelle k *est une constante, le lieu des extrémités du segment* v *est une surface algébrique du* $n^{ième}$ *degré, quel que soit le degré de* f.

En effet, si l'on représente par $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ la somme des inverses des premières, deuxièmes, ..., $n^{ièmes}$ puissances des segments déterminés par la surface f sur un rayon quelconque issu de O, on aura les relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{k}{v} = S_1 = -\frac{\Delta^1 f_1}{f_1},$$

$$(2) \qquad \frac{k^2}{v^2} = S_2 = \frac{\overline{\Delta f_1}^2}{f_1^2} - \frac{\Delta^2 f_1}{f_1},$$

$$(3) \qquad \frac{k^3}{v^3} = S_3 = \frac{\overline{\Delta f_1}^3}{f_1^3} + \frac{1}{2}\frac{\Delta f_1}{f_1}\frac{\Delta^2 f_1}{f_1} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^3 f_1}{f_1};$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$\frac{k}{\iota} = -\frac{\left(\cos\lambda \frac{d}{dx} + \cos\mu \frac{d}{dy} + \cos\nu \frac{d}{dz}\right) f_1}{f_1};$$

et ainsi de suite.

Or, si l'on appelle X, Y, Z les coordonnées de l'extrémité du segment ι et qu'on remplace $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs respectives $\frac{x'-X}{\iota}$, $\frac{y'-Y}{\iota}$, $\frac{z'-Z}{\iota}$, on voit que la première équation sera du premier degré, la deuxième sera du second degré et la $n^{ième}$ du degré n, quel que soit le degré de l'équation f.

Nous représenterons ces surfaces résultantes par F_1, F_2, $F_3, \ldots, F_n$.

171. Théorème II. — *On peut tracer sur une surface algébrique f une courbe conique qui détermine sur la génératrice quelconque du cône m segments $r_1, r_2, \ldots, r_m$ liés entre eux par la relation*

$$(n) \qquad \sum \frac{1}{r^n} = \frac{k^n}{a^n}.$$

Du centre O de la surface conique et d'un rayon a décrivez une sphère; elle coupera la surface F_n suivant une courbe sphérique dont le rayon vecteur sera a. Si maintenant on décrit une surface conique qui ait son sommet en O et pour directrice cette courbe sphérique, ce cône coupera la surface algébrique f suivant une courbe conique qui jouira de la propriété (n).

Corollaire I. — Dans le cas où $n=1$, la surface conique sera un cône circulaire droit. La courbe d'intersection de ce cône avec la surface f jouira de la propriété

$$\sum \frac{1}{r} = \frac{k}{a};$$

les tangentes seront liées entre elles d'après la loi (n'') du

n° **155**, et les rayons de courbure géodésique d'après la loi donnée dans les n°s **156** et **168**.

Corollaire II. — Si $n=2$, la surface conique aura pour courbe directrice l'intersection de la sphère de rayon a ayant son centre en O avec la surface du second degré donnée par l'équation F_2. Cette surface conique, qui jouit de propriétés remarquables, coupera la surface f du degré m suivant une courbe qui jouira de la propriété

$$\sum \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{a^2}.$$

Les tangentes et les rayons de courbure géodésique seront donnés par les formules (n'') et (R) du n° **156**.

172. Théorème III. — *Étant donnée une surface algébrique f du degré m et un point* O, *on peut trouver un cône ayant son sommet en ce point dont l'intersection avec cette surface soit une courbe telle que les m segments déterminés par cette courbe sur une génératrice quelconque du cône soient liés entre eux par la relation*

$$\frac{1}{r_1 r_2 r_3 \ldots r_m} = \frac{k}{a^m}.$$

On cherchera d'abord la surface lieu des extrémités des rayons vecteurs ι menés de O, satisfaisant à la relation

$$\frac{k}{\iota^m} = \frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_m} = \frac{\Delta^m f_1}{f_1};$$

cette surface est (n° **170**),

$$\frac{k}{\iota^m} = \frac{\Delta^m f_1}{f_1},$$

qui est du degré m.

Si l'on coupe cette surface par une sphère de rayon a ayant son centre en O, l'intersection sera la directrice de la surface conique ayant son sommet en O, qui coupera la surface f d'après la loi donnée.

Les tangentes et rayons de courbure géodésique de cette courbe seront donnés par les formules (n) et (R) du n° 160.

173. Théorème IV. — *D'un point* $O(x', y', z')$ *on mène une sécante à une surface algébrique f du degré m et l'on prend sur cette sécante, à partir du point O, un segment* ι *qui soit lié avec les m segments r déterminés par la surface, par la relation*

$$(\iota) \qquad k\iota^n = \Sigma r^n;$$

le lieu des extrémités des segments ι *est une surface du degré mn.*

L'équation (f) peut s'écrire de la manière suivante :

$$r^m + m\frac{\Delta^{m-1}f_1}{\Delta^m f_1}r^{m-1} + \frac{m.m-1.\Delta^{m-2}f_1}{\Delta^m f_1}r^{m-2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.\Delta^{m-3}f_1}{\Delta^m f_1}+\ldots$$
$$+\frac{m.m-1\ldots m-n+1.\Delta^{m-n}f_1}{\Delta^m f_1}r^{m-n}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots 1\,\Delta f_1}{\Delta^m f_1}r+\frac{m.m-1\ldots 1 f_1}{\Delta^m f_1}=0.$$

D'après cela, on a les relations

$$(1) \qquad k\iota = S_1 = -\frac{m.\Delta^{m-1}f_1}{\Delta^m f_1},$$

$$(2) \qquad k\iota^2 = S_2 = \left(\frac{m.\Delta^{m-1}f_1}{\Delta^m f_1}\right)^2 - 2\frac{m.m-1.\Delta^{m-2}f_1}{\Delta^m f_1},$$

$$(3) \qquad \begin{cases} k\iota^3 = S_3 = -\left(\dfrac{m.\Delta^{m-1}f_1}{\Delta^m f_1}\right)^3 + \dfrac{m^2\Delta^{m-1}f_1(m-1)\Delta^{m-2}f_1}{\Delta^m f_1} \\ \qquad -3\dfrac{m.m-1.m-2.\Delta^{m-3}f_1}{\Delta^m f_1}; \end{cases}$$

et ainsi de suite.

On voit que, si l'on remplace les cosinus des angles λ, μ, ν par leurs valeurs

$$\frac{x'-X}{\iota}, \quad \frac{y'-Y}{\iota}, \quad \frac{z'-Z}{\iota},$$

la première équation sera du degré m, la seconde équation sera du degré $2m$, et ainsi de suite. Nous représentons les surfaces correspondant à ces équations par Φ_m, Φ_{2m}.

On voit que, si la surface f est un plan, les surfaces Φ_1, Φ_2, $\Phi_3, \ldots$ seront, la première un plan, la seconde une surface du second degré, la troisième une surface du troisième degré, et ainsi de suite.

Il est facile de voir que le même problème pouvait être résolu dans le cas où, les rayons vecteurs $r_1, r_2, \ldots, r_m$ étant liés entre eux par une fonction ψ algébrique symétrique de ces rayons, on aurait déterminé le lieu des extrémités du segment ι lié avec les rayons vecteurs par l'équation

$$\iota = \psi(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m).$$

174. *Des courbes algébriques conjuguées entre elles.* — Traçons sur une des surfaces de la série (F) ou de la série (Φ) une courbe quelconque C algébrique et formons un cône qui ait son sommet en O et qui contienne la courbe C, il déterminera sur la surface f une courbe algébrique C′ qui sera rencontrée par la génératrice du cône en m points; il y aura donc sur la courbe C′ m arcs qui seront conjugués de la courbe C, puisque les rayons vecteurs qui seront relatifs à ces m points seront liés avec le rayon vecteur relatif à la courbe C par la relation (ι) ou par la relation (ι'). De là résulte que l'on connaît les lois d'après lesquelles sont conjuguées les tangentes en ces $m+1$ points, et les rayons de courbure géodésique par rapport à la surface conique qui les contient (n° 156 et suivants).

Si la courbe C est l'intersection d'un plan passant par le point O, avec la surface de la série (F) ou de la série (Φ) que l'on considère, les courbes C′ et C seront planes; mais les lois d'après lesquelles les points correspondants, les tangentes et les courbures en ces points seront conjugués, seront les mêmes; seulement les rayons de courbure géodésique ne seront pas distincts des rayons de courbure propre.

§ III. — Généralisation.

175. *Des courbes conjuguées sur une surface développable.* Des courbes situées sur une surface développable sont dites *conjuguées* suivant leurs rayons vecteurs lorsqu'une génératrice rectiligne variable de la surface détermine sur chacune des courbes des points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ tels, que les segments ou rayons vecteurs comptés sur cette génératrice à partir de son point de contact avec l'arête de rebroussement satisfont à une relation invariable entre ces rayons.

Si l'on développe sur un plan la surface développable, l'arête de rebroussement et les n courbes se changeront en courbes planes telles que la transformée de l'arête de rebroussement sera la courbe des pôles par rapport à n courbes planes.

Les courbes tracées sur la surface et les courbes planes seront liées entre elles par ces conditions, que les rayons vecteurs des courbes planes, les angles qu'ils forment avec les tangentes à ces courbes, les aires qu'ils balayent, les longueurs des arcs n'auront pas changé, et que les rayons de courbure des courbes planes resteront égaux aux rayons de courbure géodésique des courbes tracées sur la surface. D'après ces considérations, l'étude de ces dernières courbes est ramenée à l'étude des premières.

176. Problème V. — *Connaissant* (*fig.* 67) *la loi d'après laquelle n courbes tracées sur une surface développable sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs comptés sur une tangente à l'arête de rebroussement à partir du point de contact, trouver la loi d'après laquelle les tangentes à ces courbes sont conjuguées entre elles.*

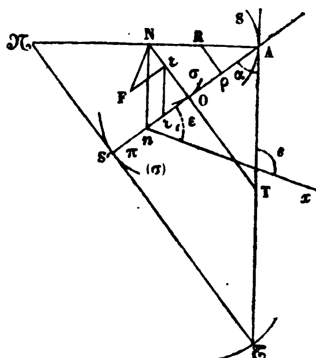
Conditions du problème. — Soient les n courbes planes correspondantes, rapportées à la courbe plane correspondant à l'arête de rebroussement, et soit l'équation

$$\text{(F)} \qquad F(r_1, r_2, \ldots, r_n) = a,$$

exprimant la loi d'après laquelle les rayons vecteurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$

sont liés entre eux; en représentant par $d\varepsilon$, $d\sigma$, ι l'angle de contingence, l'élément d'arc et le rayon de courbure de la

Fig. 67.



courbe des pôles, en conservant les notations déjà usitées et en admettant toujours que les lettres dénuées d'accent doivent se rapporter à une quelconque des courbes conjuguées, on a les équations suivantes :

$$(1) \quad \cos\alpha = \frac{d(r+\sigma)}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{r\,d\varepsilon}{ds}, \qquad dr = (r\cot\alpha - \iota)\,d\varepsilon;$$

$$(2) \quad ds = \mathrm{R}\,de, \qquad d\varepsilon = de - d\alpha, \quad d\sigma = \iota\,d\varepsilon.$$

Lois analytiques des tangentes. — Si l'on élimine de et ds entre la deuxième des équations (1) et les deux premières équations (2), on obtient la relation

$$(3) \qquad d\alpha = \left(\frac{r}{\mathrm{R}\sin\alpha} - 1\right) d\varepsilon,$$

et, en ayant égard à la troisième des équations (1), on obtient le rapport de $d\alpha$ à dr, donné par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{dr} = \frac{r - \mathrm{R}\sin\alpha}{\mathrm{R}(r\cos\alpha - \iota\sin\alpha)};$$

or, si l'on différentie l'équation (F) et qu'on élimine les dr au moyen des n équations contenues dans le type représenté par la dernière des équations (1), on aura la relation suivante :

$$(n) \qquad \iota \sum \frac{dF}{dr} = \sum r \frac{dF}{dr} \cot\alpha.$$

Interprétation géométrique. — Si l'on représente par A le point où le rayon vecteur r coupe la courbe s, O son point de contact avec la courbe des pôles, et N le point où la normale à la courbe s coupe la normale à la courbe σ, ι le centre de courbure de cette dernière, n le point, pris sur le rayon vecteur, qui se projette en N sur la normale à la courbe s, et ι_1 le point où une droite menée par le centre de courbure parallèlement à Nn rencontre le rayon vecteur, on aura les relations

$$\text{ON} = \text{OA}\cot\alpha, \quad \text{O}n = r\cot^2\alpha = \text{ON}\cot\alpha;$$

d'après cela, l'équation (n) s'écrit sous la forme suivante :

$$(n_1) \qquad \sum \overline{\text{N}\iota}\,\frac{dF}{dr} = 0.$$

Cette équation donne lieu au théorème suivant :

Théorème. — *Si n courbes sont conjuguées suivant leurs rayons vecteurs comptés sur une tangente à une courbe à partir du point de contact, que par le centre de courbure ι de cette dernière on élève une perpendiculaire au rayon de courbure sur laquelle on construise, à partir du point ι et pour chaque courbe, des longueurs* ιF *proportionnelles à la dérivée de* F *par rapport au rayon correspondant, et que l'on construise la série des triangles rectangles dont l'un aurait une de ces longueurs pour côté de l'angle droit et le segment* Nι *pour second côté, la somme algébrique de ces triangles sera nulle.*

177. Problème VI. — *Les mêmes choses étant données que dans le problème précédent, trouver la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure des n courbes.*

Prenons la différentielle de l'équation (n) et éliminons les dr au moyen des équations renfermées dans le type fourni par la troisième des équations (1) et les $d\alpha$ au moyen des équations données par le type (4), on trouve la relation

$$\sum \frac{r_i^2 \dfrac{dF}{dr_i}}{R \sin^3\alpha_i} = \sum \cot^2\alpha_i \left(r_i \frac{dF}{dr_i}\right) + \sum (r_i - \iota') \frac{dF}{dr_i}$$
$$+ \sum (r_j \cot\alpha_j - \iota)\left[\cot\alpha_i \frac{d}{dr_j}\left(r_i \frac{dF}{dr_i}\right) - \iota \frac{d^2F}{dr_i\, dr_j}\right],$$

dans laquelle les indices i et j doivent prendre toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à n, et dans laquelle ι' est la dérivée de ι par rapport à ε, ou bien du rayon de courbure de la développée de σ.

Si la fonction F est telle que sa dérivée par rapport à l'une quelconque des variables r ne dépend que de cette variable, il faut faire l'indice i égal à l'indice j, dans l'équation que nous venons de trouver, ce qui permet de supprimer ces indices, et l'équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum \frac{N^2}{R} \frac{\dfrac{dF}{dr}}{\sin\alpha} = \sum \left[\cot^2\alpha \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) + r \frac{dF}{dr}\right]$$
$$- \iota \sum \cot\alpha \left[\frac{d}{dr}\left(r \frac{dF}{dr}\right) + r \frac{d^2F}{dr^2}\right]$$
$$+ \iota^2 \sum \frac{d^2F}{dr^2} - \iota' \sum \frac{dF}{dr}.$$

Telle est l'équation qui donne la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure des courbes s, et l'on voit qu'elle dépend de la courbe σ et de sa développée.

178. Problème VII. — *n courbes sont conjuguées entre elles suivant leurs rayons vecteurs d'après la loi*

(F) $$F(r_1 + \sigma, r_2 + \sigma, \ldots, r_n + \sigma) = a,$$

trouver la loi d'après laquelle les tangentes à ces courbes sont

conjuguées, ainsi que la loi d'après laquelle les rayons de courbure sont conjugués entre eux.

Si l'on différentie l'équation (F) et qu'on élimine les $d(r+\sigma)$ au moyen des équations (1) du n° 176, on obtient la relation

$$(n) \qquad \sum \frac{dF}{d(r+\sigma)} r \cot\alpha = 0 = \sum \frac{dF}{d(r+\sigma)} \text{ON}.$$

Si l'on différentie cette dernière équation par rapport à $(r+\sigma)$ et qu'on élimine les $d(r+\sigma)$ et les $d\alpha$, on aura l'équation

$$\sum \frac{r_i^2 \dfrac{dF}{d(r_i+\sigma)}}{R \sin^3\alpha_i}$$

$$= \sum \frac{r_i \dfrac{dF}{d(r_i+\sigma)}}{\sin^2\alpha_i} + \sum r_i \cot\alpha_i \cot\alpha_j \frac{d}{d(r_j+\sigma)} \left[r_i \frac{dF}{d(r_i+\sigma)} \right];$$

si la dérivée de F par rapport à l'un quelconque des binômes $(r+\sigma)$ ne dépend que de ce binôme, on a

$$\frac{d}{d(r+\sigma)} \left[r \frac{dF}{d(r+\sigma)} \right] = \frac{dr}{d(r+\sigma)} \frac{dF}{d(r+\sigma)} + r \frac{d^2F}{d(r+\sigma)^2},$$

et les équations (1) donnent

$$\frac{dr}{d(r+\sigma)} = \frac{\iota \cot\alpha - r}{\iota \cot\alpha} = 1 - \frac{r}{\iota \cot\alpha};$$

on aura donc la relation suivante :

$$(R) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{r^2 \dfrac{dF}{d(r+\sigma)}}{R \sin^3\alpha} = \sum \cot^2\alpha \left[2r \frac{dF}{d(r+\sigma)} + r^2 \frac{d^2F}{d(r+\sigma)^2} \right] \\ + \sum \frac{dF}{d(r+\sigma)} (r - \iota \cot\alpha), \end{aligned} \right.$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, en représentant par $A\pi$ (*fig.* 67) une troisième proportionnelle à N et la pro-

jection de R sur le rayon vecteur :

$$\sum A\pi \frac{dF}{d(r+\sigma)} = \sum (2.On + OA - O\mathfrak{t}_1) \frac{dF}{d(r+\sigma)} + \sum r.On \frac{d^2F}{\overline{d(r+\sigma)}^2}.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$O\mathfrak{t}_1 = O\mathfrak{t} \cot\alpha, \quad O\mathfrak{t}_1 = On - n\mathfrak{t}_1,$$

cette équation devient

$$(R_1)\left\{\begin{aligned} &\sum (A\pi - OA - On + n\mathfrak{t}_1) \frac{dF}{d(r+\sigma)} = \sum r.On \frac{d^2F}{\overline{d(r+\sigma)}^2}, \\ &\sum (n\pi + n\mathfrak{t}_1) \frac{dF}{d(r+\sigma)} = \sum r.On \frac{d^2F}{d(r+\sigma)^2}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (n) conduit à un théorème analogue à celui du n° 154, et l'équation (R) à un théorème analogue à celui du n° 155.

Extension de la méthode précédente. — Soit S′ l'origine de l'arc σ terminé au point de contact O. Si l'on développe l'arc S′O de manière à le ramener sur la tangente au point O, l'extrémité S′ décrira une développante (σ) de la courbe σ. D'après cela, on voit que les n courbes conjuguées par rapport à la courbe des pôles, d'après la loi $F = a$, sont conjuguées par rapport à la courbe (σ) par la condition que les segments ou rayons vecteurs p_1, $p_2, \ldots$, interceptés sur une normale quelconque à la courbe (σ) par les n courbes s_1, $s_2, \ldots, s_n$, sont conjugués d'après la loi

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = a;$$

on a donc la solution de la nouvelle question suivante :

PROBLÈME VIII. — *Étant donnée une courbe (σ) et n courbes s, si les segments p_1, $p_2, \ldots, p_n$ interceptés sur la normale à la*

première courbe par les n autres courbes sont conjugués d'après la loi

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = a,$$

trouver la loi d'après laquelle les tangentes à ces n courbes sont conjuguées entre elles, ainsi que la loi qui lie leurs rayons de courbure.

La construction de la tangente et du centre de courbure de l'une des courbes, quand on connaît la tangente et le centre de courbure des autres courbes, est aussi donnée par les formules du numéro précédent.

179. *Application des formules précédentes.* — 1° Soit

$$F = \Sigma(r + \sigma) = a.$$

La formule (n) du n° 178 devient

$$\Sigma r \cot\alpha = 0,$$

et conséquemment

$$(n) \qquad \Sigma ON = 0,$$

et la formule (R) du même numéro prend les formes suivantes :

$$\sum \frac{r^2}{R \sin^3\alpha} = \sum \frac{r}{\sin^2\alpha} + \sum r \cot^2\alpha - \sum \iota \cot\alpha;$$

donc, si l'on se reporte à la *fig.* 67, on aura les relations suivantes :

$$\Sigma A\pi = \Sigma A n + \Sigma O n - \Sigma O\iota_1, \quad \Sigma n\pi = \Sigma O n - O\iota_1 = \Sigma n\iota_1,$$

$$(R) \qquad \Sigma n\pi - \Sigma n\iota_1 = 0.$$

On déduit des relations (n) et (R) une construction facile de la normale et du rayon de courbure d'une des courbes conjuguées au moyen des normales et des rayons de courbure des autres courbes.

2° Soit

$$F = \Sigma \mathcal{L}(r + \sigma) = \mathcal{L}a,$$

dans laquelle $\mathcal{L}$ indique un logarithme.

Si l'on remarque que $S'\varpi$ est la sous-tangente de la courbe s rapportée à la courbe (σ) et que OT est la sous-tangente de la courbe s rapportée à la courbe σ, on a la relation

$$\frac{1}{S'\varpi} = \frac{AO}{OT.AS'};$$

d'après cela, l'équation (n) prend les formes

$$(n) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{r}{r+\sigma} \cot\alpha = 0, \\ &\sum \frac{OA}{S'\varpi} = \sum \frac{\overline{AO}^2}{OT.AS'} = \sum \frac{ON}{AS'} = \sum \frac{AN}{A\varpi} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (R) du n° 178 devient

$$(R) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{r^2}{R \sin^3\alpha} \frac{1}{\sigma + r} \\ &= \sum \frac{2r\cos^2\alpha}{(r+\sigma)\sin^2\alpha} - \sum \frac{r - v\cot\alpha}{r+\sigma} - \sum \frac{r^2\cot^2\alpha}{(r+\sigma)^2}, \end{aligned} \right.$$

lesquelles donnent la construction de la normale et du rayon de courbure de l'une des courbes conjuguées au moyen des autres courbes.

180. Problème IX. — *n courbes sont conjuguées par rapport à un pôle O d'après la loi*

$$F(r_1\alpha_1\ r_2\alpha_2, \ldots, r_n\alpha_n) = a;$$

trouver la loi d'après laquelle sont conjugués les rayons de courbure et les rayons vecteurs.

1° Si l'on différentie l'équation F, et qu'on élimine les dr et les $d\alpha$, on aura l'équation

$$(R) \qquad \sum \frac{r\,dF}{dr} \cot\alpha + \sum \frac{dF}{d\alpha}\left(\frac{r}{R\sin\alpha} - 1\right) = 0,$$

ou bien, en se reportant à la *fig.* 67, les deux relations

$$\sum \frac{dF}{dr} \times ON + \sum \frac{dF}{d\alpha}\left(\frac{AN}{AR} - 1\right) = 0,$$

$$(R_1) \qquad \sum \frac{dF}{dr} \times ON + \sum \frac{dF}{d\alpha}\frac{RN}{AR} = 0,$$

qu'il est facile d'interpréter géométriquement.

Les équations (R), (R_1) donnent la loi d'après laquelle les rayons de courbure des lignes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont conjugués.

2° Si, dans l'équation $F(r_1\alpha_1, \ldots, r_n\alpha_n) = 0$, on porte $r_1\alpha_1, \ldots, r_{n-1}\alpha_{n-1}$, tirés de l'équation des $(n-1)$ courbes connues en fonction de l'angle ω que la ligne des rayons vecteurs fait avec l'axe Ox, on a une équation de la forme suivante :

$$\varphi(\omega, r_n\alpha_n) = 0;$$

or on a la relation

$$\frac{dr_n}{r_n\,d\omega} = \cot\alpha_n;$$

si l'on élimine α_n entre ces deux équations, on aura une équation de la forme

$$f\left(\omega, r_n\frac{dr_n}{d\omega}\right) = 0,$$

qui, étant intégrée, donnera l'équation de la $n^{ième}$ courbe. Cela posé, si l'on porte les α en fonction des r correspondants dans l'équation F, on aura la loi d'après laquelle les rayons vecteurs des courbes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont conjugués.

Remarque. — Un terme quelconque des équations (R) de ce Chapitre ne dépend d'un seul indice que lorsque la fonction F est telle qu'une quelconque de ses dérivées ne dépend que d'une seule variable. La fonction f du n° 100 a été supposée satisfaire à cette condition, comme l'indique la forme de l'équation des rayons de courbure de ce numéro.

LIVRE III.

DES COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES QUELCONQUES.

CHAPITRE PREMIER.

DES COORDONNÉES EN GÉNÉRAL.

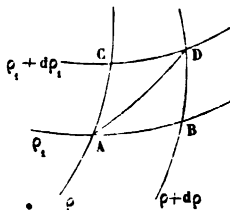
181. *Coordonnées d'un point.* — La définition d'une courbe donne une relation entre un point quelconque de cette courbe et une ou plusieurs grandeurs géométriques, appelées *paramètres*. La variation d'un paramètre déterminé ρ donne une série infinie de courbes qui occupent toutes les positions possibles; si l'on se donne une seconde courbe dépendante d'un paramètre ρ_1, on aura une seconde série de courbes en donnant à ρ_1 toutes les valeurs possibles; un point quelconque du plan qui contient ces deux séries de courbes sera déterminé par l'intersection de deux courbes correspondant à des valeurs déterminées de ρ et de ρ_1. Ces deux valeurs sont les coordonnées du point, et les deux familles de courbes (ρ) et (ρ_1) forment un système de lignes coordonnées. Généralement, l'angle sous lequel se coupent les lignes coordonnées n'est ni droit ni constant: il varie avec la position du point, il est une fonction des coordonnées ρ, ρ_1.

182. *Problème des coordonnées.* — Soit un point assujetti à parcourir une courbe quelconque située dans le plan des coordonnées; si l'on étudie les diverses positions de ce point dans le plan, les déplacements de ce point ont des liaisons nécessaires avec les déplacements des lignes coordonnées; il en

résulte des relations entre les tangentes, les courbures de la courbe et les tangentes, les courbures des lignes coordonnées, et, plus généralement, entre les éléments de la courbe et les éléments correspondants des lignes coordonnées. Le problème des coordonnées curvilignes consiste à faire connaître ces relations, qui, au point de vue géométrique, sont des théorèmes importants de la Géométrie des courbes, et, au point de vue analytique, sont des formules précieuses de transformation des variables.

183. *Tangentes aux lignes coordonnées. — Paramètres différentiels.* — Si l'on considère (*fig.* 68) sur la ligne ρ_1 de la

Fig. 68.



série (ρ_1) deux points infiniment voisins A, B correspondant aux valeurs ρ et $\rho + d\rho$ de deux courbes de la série (ρ), la direction de la corde AB qui joint ces deux points donne la direction de la tangente de la ligne ρ_1, et cette corde donne la longueur de l'arc de la courbe ρ_1 compris entre ces deux points; si l'on appelle $d\sigma$ cet arc, il aura en chaque point un rapport fini avec $d\rho$, puisque $d\sigma$ et $d\rho$ sont des infiniment petits du même ordre; donc, en représentant par H ce rapport, et en opérant de même sur la courbe ρ dont l'élément sera appelé $d\sigma_1$ et le rapport de $d\sigma_1$ à $d\rho_1$ sera représenté par H_1, on aura les deux relations suivantes :

$$(1) \qquad d\sigma = H\,d\rho, \quad d\sigma_1 = H_1\,d\rho_1;$$

les grandeurs H et H_1 sont appelées *paramètres différentiels des lignes coordonnées*. Nous représenterons par d_0, d_1, ou bien par d_ρ, d_{ρ_1} les différentielles partielles par rapport à ρ ou à ρ_1,

la lettre d indiquant une différentielle complète, de sorte que l'on a $d = d_0 + d_1$ symboliquement.

L'angle φ des lignes coordonnées sera l'angle des deux éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, ou bien des deux normales dn, dn_1 aux deux lignes coordonnées.

Un chiffre entre parenthèses, placé à droite d'une équation, indiquera le nombre d'équations qu'elle contient et qui s'en déduisent par la permutation des indices.

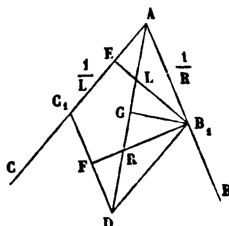
184. *De la courbure propre et de la courbure inclinée des lignes coordonnées.* — L'angle I de deux tangentes à la courbe $d\sigma$ menées par les deux extrémités de cet élément est *l'angle de contingence propre* de la ligne $d\sigma$, et l'angle J des deux tangentes aux courbes infiniment voisines de l'autre série menées par les extrémités du même élément $d\sigma$ est *l'angle de contingence inclinée* du même élément, suivant les tangentes aux courbes de l'autre série; le rapport de l'angle I à l'élément $d\sigma$ est *la courbure propre* de la ligne $d\sigma$, et le rapport de l'angle J à $d\sigma$ est *la courbure inclinée* de la ligne $d\sigma$ suivant la courbe $d\sigma_1$. La direction de ces deux courbures est donnée par l'arc de cercle infiniment petit qui mesure les angles I et J. Les rayons de courbure propre ou inclinée des lignes coordonnées sont donc connus en grandeur et en direction. Nous représenterons par R, R_1 les premiers et par L, L_1 les seconds. D'après cela, si nous nous reportons au problème du n° 53, relatif à la développée oblique d'une courbe $d\sigma$, suivant l'angle variable φ des lignes coordonnées, le rayon tangentiel r de cette développée oblique est perpendiculaire au rayon de courbure inclinée L de la courbe $d\sigma$, et, de plus, ces deux rayons sont liés entre eux par la relation

$$\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{1}{L}. \qquad (2)$$

185. *Des composantes obliques des courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées.* — On est souvent conduit à composer ou à décomposer deux courbures suivant la règle du parallélogramme des forces; voici comment se fait cette composition :

Composition des courbures. — Soient (*fig.* 69) deux cour-

Fig. 69.



bures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{L}$ appliquées au point A suivant les directions AB, AC; supposons que ces deux courbures, que nous représentons par AB_1, AC_1, aient été composées en une seule AD, suivant la règle du parallélogramme des forces. Si du point B_1 on élève la droite B_1F égale au rayon de courbure R, perpendiculaire à ce rayon et du même côté que l'angle AB_1D, et aussi la droite B_1E égale au rayon de courbure oblique L, perpendiculaire à la direction de ce rayon et du même côté que l'angle DB_1A, et qu'on mène des points F et E des perpendiculaires à ces deux droites, elles déterminent les points A et D; joignons AD; l'inverse de la perpendiculaire abaissée du point B_1 sur AD sera égale à la résultante des deux courbures et perpendiculaire à sa direction. En effet, d'après la relation qui existe entre les trois hauteurs du triangle AB_1D, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{\overline{B_1G}^2} = \frac{1}{\overline{B_1E}^2} + \frac{1}{\overline{B_1E}^2} + 2\frac{\cos A}{B_1F \times B_1E};$$

or, d'une autre part, les côtés du triangle AB_1D sont inversement proportionnels aux hauteurs correspondantes; de là résulte que ce triangle n'est pas distinct du triangle des forces. Donc les courbures se composent comme les forces.

Ce théorème fournit donc le moyen de calculer les courbures et réciproquement.

Composition des angles de contingence. — Puisque l'on passe des courbures, soit propres, soit obliques, d'un arc aux

angles de contingence correspondants en multipliant ces courbures par l'élément de la courbe $d\sigma$, toute équation homogène qui existera entre les courbures d'un arc existe aussi entre les angles de contingence correspondants; de là résulte que l'on peut composer et décomposer les angles de contingence, soit propre, soit inclinée, d'un arc suivant la règle du parallélogramme des forces.

186. *Composantes obliques des courbures suivant les arcs coordonnés.* — Soient $\frac{1}{\iota}, \frac{1}{\iota'}; \frac{1}{\iota_1}, \frac{1}{\iota'_1}$ les composantes obliques des courbures $\frac{1}{R}, \frac{1}{R_1}$, d'après la règle du parallélogramme des forces, suivant les arcs coordonnés; soient $\frac{1}{l}, \frac{1}{l'}; \frac{1}{l_1}, \frac{1}{l'_1}$ les composantes des courbures $\frac{1}{L}, \frac{1}{L_1}$, suivant les mêmes arcs; on a les relations

$$(4)\qquad \frac{1}{R} = -\frac{\sin\varphi}{\iota\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\iota'},\quad \frac{1}{L} = -\frac{\sin\varphi}{l'\cos\varphi} = \frac{1}{l\cos\varphi}.\qquad (2)$$

De même, si l'on représente par $i, i'; i_1, i'_1$ les composantes obliques des angles de contingence I, I_1, suivant les arcs coordonnés $d\sigma, d\sigma_1$, et par $j, j'; j_1, j'_1$ les composantes obliques, suivant les mêmes arcs des angles de contingence inclinés J, J_1, on aura les relations

$$(4')\qquad I = -i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = i'\sin\varphi,\quad J = -j'\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = j\sin\varphi.\qquad (2)$$

187. *Variation de l'angle des lignes coordonnées.* — Par les extrémités A, C de l'arc $d\sigma$ (*fig.* 70), menons des tangentes à cet arc, ainsi qu'aux deux arcs de l'autre série de coordonnées qui passent par ces points, nous formons un quadrilatère dont les angles sont φ, $180 - I$, $180 - \varphi - d_0\varphi$, J; or la somme de ces angles est égale à 360 degrés; on aura donc la relation

$$(5)\qquad d_0\varphi = J - I,\qquad (2)$$

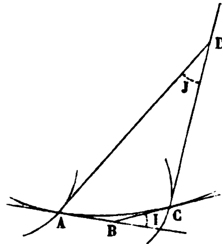
et, en divisant par $d\sigma$, on aura la relation fondamentale

$$(5') \qquad \frac{d_\theta \varphi}{d\sigma} = \frac{1}{L} - \frac{1}{R}. \qquad (2)$$

Elle n'est pas distincte de celle que nous avons trouvée dans les systèmes tangentiels de coordonnées (Chap. III, n° 47).

Ces formules sont générales, pourvu que les angles J et I soient comptés positivement ou négativement, suivant que les

Fig. 70.



parallèles menées du point A à la tangente BC et à la tangente CD se trouvent d'un côté ou de l'autre, la première par rapport à la tangente AB, la seconde par rapport à la tangente AD.

188. *Expression de l'angle de courbure d'une courbe coordonnée $d\sigma$ en fonction des variations des arcs coordonnés.*

Problème. — *Un point quelconque* A (*fig.* 71) *d'une courbe $d\sigma$ subit un déplacement* AB *dans une direction donnée par une certaine loi, de telle sorte que le lieu des points* B *est une certaine courbe; trouver l'expression de l'angle de contingence* I *en fonction de la variation de l'arc $d\sigma$ et de la variation du déplacement* AB.

AE, EA' sont deux tangentes infiniment voisines à la courbe $d\sigma$; A'N est perpendiculaire à A'E, A'M_1 à AE; A'I' est parallèle à AB; μ est le cosinus de l'angle EAB; $d\sigma_1$ est le déplacement AB; A'B' le déplacement infiniment voisin;

d_1 représente la variation. Cela posé, les deux triangles A'ME, $M_1A'N$ donnent

$$\text{angle}\,I = \frac{A'M}{A'E} = \frac{M_1N}{A'N} = \frac{M_1B' - B'N}{A'N} = \frac{M_1I' + I'B' - NB'}{A'N};$$

or

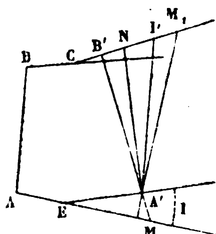
$$M_1I' = -\mu d\sigma_1,\quad I'B' = -d_1 d\sigma,$$
$$NB' = -\mu d\sigma_1 - d_0(\mu d\sigma_1),\quad A'N = d\sigma_1 \sin\varphi;$$

substituant, on a

$$(6)\qquad -I = \frac{d_1 d\sigma - d_0(\mu d\sigma_1)}{d\sigma_1 \sin\varphi}.$$

Cette formule est tout à fait générale et se rapporte à un déplacement $d\sigma_1$ quelconque; on peut donc admettre que ce

Fig. 71.



déplacement est l'arc de courbe coordonnée σ_1 compris entre deux courbes infiniment voisines de la série (σ).

On pourra donc écrire la formule précédente sous la forme

$$(6')\qquad -\sin\varphi \frac{d\sigma}{d\rho}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{1}{R} = \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right) - \frac{d}{d\rho}\left(\cos\varphi \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\right). \qquad (2)$$

Si le déplacement $d\sigma_1$ est parallèle à une direction fixe, par exemple à l'axe des x, on aura les relations

$$d_1 d\sigma = 0,\quad \cos\varphi = \frac{dx}{d\sigma},\quad d\sigma_1 = dx = d\rho_1,$$

et la formule deviendra

$$\frac{\cos(R, dx)}{R} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\frac{d\rho}{d\sigma}, \qquad (2)$$

laquelle donne l'angle que le rayon de courbure fait avec l'axe des x; on trouverait une formule analogue pour l'axe des y.

189. *Expression de la courbure inclinée d'une ligne coordonnée suivant l'autre ligne.* — Si dans la formule (6′) on remplace $\frac{1}{R}$ par sa valeur tirée de la formule (5′), on aura

$$(7') \qquad d\sigma_1 \frac{d\sigma}{L} \sin\varphi = \cos\varphi\, d_0 d\sigma_1 - d_1\, d\sigma. \qquad (2)$$

On déduit de l'équation (6′) que, si la série (ρ_1) des lignes coordonnées se compose de lignes droites, l'autre série se composant de lignes quelconques, on a l'équation

$$(6'') \qquad d_1\, d\sigma = d_0(\cos\varphi\, d\sigma_1).$$

Donc, si la série (ρ_1) se compose de lignes droites, les variations par rapport aux paramètres réciproques de l'élément de l'arc d'une ligne de la série et de la projection de l'élément d'arc de la ligne de l'autre série sur la première sont égales.

La formule (7′) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(7) \qquad J = \frac{\cos d_0 d\sigma_1 - d_1\, d\sigma}{d\sigma_1 \sin\varphi}. \qquad (2)$$

Les formules (6) et (7) sont fondamentales : elles renferment de nombreuses propriétés, que nous développerons dans le courant de ce Chapitre.

190. *Variations des arcs coordonnés.* — Si l'on résout par rapport à $d_0\, d\sigma_1$ et $d_1\, d\sigma$ les deux équations contenues dans le type (7), on a les deux relations contenues dans le type suivant :

$$(8) \qquad -\sin\varphi\, d_0 d\sigma_1 = J_1\, d\sigma + J\cos\varphi\, d\sigma_1, \qquad (2)$$

ou bien dans le type

$$(8') \qquad -\sin\varphi\, d_0\, d\sigma_1 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{\cos\varphi}{L}\right) d\sigma\, d\sigma_1; \qquad (2)$$

or, si l'on représente par $d\omega$ l'aire du quadrilatère dont les deux côtés contigus sont $d\sigma$, $d\sigma_1$, et par $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda_1}$ les projections orthogonales de la résultante des courbures $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L_1}$ sur la direction de ces courbures, la variation de l'arc est exprimée d'une manière aussi simple que significative par le type suivant :

$$(8'') \qquad -d_0\, d\sigma_1 = \frac{d\omega}{\lambda_1 \sin^2\varphi}; \qquad (2)$$

si l'angle φ était constant, on aurait

$$(8''') \qquad -d_0\, d\sigma_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\cos\varphi}{R}\right) \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{\sin\varphi}; \qquad (2)$$

si cet angle était droit, on trouverait

$$(8^{\text{IV}}) \qquad -d_0\, d\sigma_1 = \frac{d\sigma\, d\sigma_1}{R_1}; \qquad (2)$$

Enfin si, de plus, la série des lignes (ρ) était composée de lignes droites, la formule précédente donnerait la relation

$$d_0\, d\sigma_1 = 0,$$

laquelle signifie que, la variation de l'arc $d\sigma_1$ étant nulle par rapport à ρ, l'élément $d\sigma_1$ sera le même pour toutes les valeurs de ρ; ce qui conduit à ce théorème connu :

Les trajectoires orthogonales d'un système de lignes droites interceptent sur ces lignes des longueurs constantes.

La réciproque de ce théorème est également vraie; car si les lignes d'un système coupant orthogonalement les lignes d'un autre système interceptent sur celles-ci des longueurs constantes, leurs variations sont nulles; donc l'équation (8^{IV}) prouve que $\frac{1}{R_1}$ est nul pour tout point d'une de ces lignes, et

que, par conséquent, ce sont des lignes droites. Ces propriétés ont déjà été démontrées dans la théorie des développées des courbes.

191. *Variation des angles de contingence propres ou inclinés des lignes coordonnées.* — On a les deux relations

$$I = \frac{d\sigma}{R}, \quad I_1 = \frac{d\sigma_1}{R_1};$$

si l'on différentie la première par rapport à ρ_1 et la seconde par rapport à ρ, en ayant égard aux formules (8″), on trouve les deux équations contenues dans le type suivant :

$$(9) \qquad d_1 I = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R\lambda \sin\varphi} \right]. \qquad (2)$$

En opérant de même sur les deux relations

$$J = \frac{d\sigma}{L}, \quad J_1 = \frac{d\sigma_1}{L_1},$$

on obtiendra les deux formules contenues dans le type

$$(10) \qquad d_1 J = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{1}{L} \right) - \frac{1}{L\lambda \sin\varphi} \right]; \qquad (2)$$

si les coordonnées se coupent sous un angle constant, on aura

$$(9') \qquad d_1 I = d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R \sin\varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{\cos\varphi}{R} \right); \qquad (2)$$

enfin, si l'on représente par ψ' une fonction quelconque de l'angle des coordonnées φ, on aura généralement dans le cas de φ quelconque les formules

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} d_1(I.\psi') &= d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{\psi'}{R} \right) - \frac{\psi'}{R\lambda \sin\varphi} \right], \\ d_1(J.\psi') &= d\sigma\, d\sigma_1 \left[\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{\psi'}{R} \right) - \frac{\psi'}{L\lambda \sin\varphi} \right]. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$



CHAPITRE II.

DES LIAISONS ENTRE LES VARIATIONS DES COURBURES.

192. *De la double variation de l'angle des lignes coordonnées.* — Nous avons trouvé les deux équations

$$(1) \qquad d_0\varphi = J - I, \quad d_1\varphi = J_1 - I_1.$$

Si l'on prend la variation de la première par rapport à ρ_1 et celle de la seconde par rapport à ρ, on obtient

$$(1') \qquad d_0 d_1\varphi = d_1(J - I) = d_0(J_1 - I_1);$$

de là on conclut les deux théorèmes suivants :

1° *La double variation de l'angle des lignes coordonnées est égale à la différence des variations des angles de contingence propre et de contingence inclinée d'une courbe coordonnée par rapport au paramètre correspondant à cette courbe.*

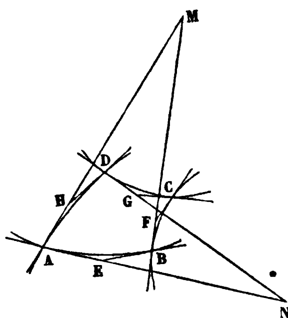
2° *Les sommes des variations de l'angle de contingence propre d'une courbe et de l'angle de contingence propre de sa conjuguée par rapport aux paramètres correspondant à ces courbes sont égales.*

193. *Propriété de l'octogone infinitésimal des tangentes.* — Menons des tangentes (*fig.* 72) aux sommets du quadrilatère curviligne formé par deux courbes d'une série infiniment voisines, coupées par deux courbes de l'autre série infiniment voisines; on obtient ainsi un octogone rectiligne dont la somme des angles est connue; or, si l'on remarque que les angles de ce polygone sont

$$\varphi,\ \pi - I,\ \pi - \varphi - \partial_0\varphi,\ I + \partial_0 I + \pi,$$
$$\varphi + \partial\varphi,\ I + \partial_1 I + \pi,\quad \pi - \varphi - \partial_1\varphi,\ \pi - I,$$

et que la somme des angles de ce polygone est égale à autant

Fig. 72.



de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone, on aura

$$\partial\varphi - \partial_0\varphi - \partial_1\varphi + \partial_0 I_1 + \partial_1 I = 0;$$

si l'on développe les variations négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on trouve

$$(2) \qquad - d_0 d_1 \varphi = d_0 I_1 + d_1 I;$$

si l'on a égard aux équations (1), cette formule conduit à la relation suivante :

$$(3') \qquad d_0 d_1 \varphi = d_0 J_1 + d_1 J,$$

et, conséquemment,

$$(4) \qquad \begin{cases} d_0(J_1 + I_1) + d_1(J_1 + I) = 0, \\ d_0(J_1 - I_1) + d_1(J - I) = 2d_0 d_1 \varphi. \end{cases}$$

194. *Conséquences et transformations.* — On déduit des deux formules précédentes ce nouveau théorème :

3° *La double variation de l'angle des lignes coordonnées est égale à la somme des variations des angles de contingence propre, ou des angles de contingence inclinée suivant leurs paramètres réciproques.*

Si les lignes coordonnées se coupent sans angle constant, les formules (3) et (3′) deviennent

$$d_0 I_1 + d_1 I = 0, \quad d_0 J_1 + d_1 J = 0.$$

Donc on a la proposition suivante :

4° *Dans tout système de coordonnées curvilignes à angle constant, la somme des variations des angles de contingence propre ou des angles de contingence inclinée, suivant les paramètres réciproques, est nulle.*

Si une série (ρ_1) de lignes coordonnées se compose de lignes droites, on a l'équation

$$-d_0 d_1 \varphi = d_0 I,$$

laquelle conduit à la propriété suivante :

5° *Si deux séries de lignes coordonnées sont composées de lignes droites, la double variation de l'angle des lignes coordonnées est égale à la variation de l'angle de contingence des lignes de l'autre série, suivant le paramètre réciproque.*

Si l'on rapproche la deuxième des équations (2) de la première des équations (4), on trouve les deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} d_1 J + d_0 I_1 = 0, \\ d_0 J_1 + d_1 I = 0, \end{cases}$$

qui conduisent au théorème suivant :

6° *La somme des variations de l'angle de contingence d'un arc et de l'angle de contingence incliné de l'arc conjugué par rapport aux paramètres réciproques est nulle.*

195. *Applications.* — PROBLÈME. — *Trouver les conditions pour qu'un système de coordonnées jouisse de cette propriété, que la somme des variations des angles de contingence des lignes coordonnées soit égale à une fonction donnée*

$$F(\rho\rho_1)\, d\rho\, d\rho_1.$$

L'équation (2) donne

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho\, d\rho_1} = -\mathrm{F}(\rho\rho_1).$$

Cette équation aux différences partielles a pour intégrale

$$\varphi = f(\rho) + f_1(\rho_1) - \int_0^\rho d\rho \int_0^{\rho_1} \mathrm{F}(\rho\rho_1)\, d\rho_1,$$

et l'on voit que la forme de l'angle φ, qui donne la somme des variations des angles de contingence égale à zéro, est

$$\varphi = \text{const.} + f(\rho) + f_1(\rho_1).$$

Ainsi, pour que cette somme des variations soit nulle, il n'est pas nécessaire que l'angle φ soit constant, il suffit qu'il soit égal à la somme de deux fonctions ne contenant chacune que l'un des deux paramètres ρ ou ρ_1.

196. *Généralisation des formules précédentes.* — Représentons par ψ une fonction arbitraire de l'angle φ et par ψ' sa dérivée par rapport à l'angle φ; multiplions les formules (1) par ψ, et différentions la première par rapport à ρ_1 et la seconde par rapport à ρ, et ajoutons, nous trouvons les relations suivantes :

$$[2] \qquad d_0 d_1 \psi = d_1[\psi'(\mathrm{J} - \mathrm{I})] = d_0[\psi'(\mathrm{J}_1 - \mathrm{I}_1)];$$

d'une autre part, posons pour abréger

$$\frac{1}{\mathrm{LL}_1} - \frac{1}{\mathrm{RR}_1} = \frac{\sin\varphi}{\mathrm{K}},$$

les deux équations (5) donneront les deux relations suivantes :

$$[5] \qquad \begin{cases} d_1(\psi'\mathrm{J}) + d_0(\psi'\mathrm{I}_1) = \dfrac{\psi'' d\omega}{\mathrm{K}}, \\ d_0(\psi'\mathrm{J}_1) + d_1(\psi'\mathrm{I}) = \dfrac{\psi'' d\omega}{\mathrm{K}}; \end{cases}$$

si l'on combine ces équations avec les relations [2], on obtiendra les formules

$$[3]\quad \begin{cases} d_1(\psi' \mathrm{I}) + d_0(\psi' \mathrm{I}_1) = \dfrac{\psi''}{\mathrm{K}} d\omega - d_0 d_1 \psi, \\ d_1(\psi' \mathrm{J}) + d_0(\psi' \mathrm{J}_1) = \dfrac{\psi''}{\mathrm{K}} d\omega + d_0 d_1 \psi, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les deux équations résultantes

$$[4]\quad \begin{cases} d_1[\psi'(\mathrm{J} - \mathrm{I})] + d_0[\psi'(\mathrm{J}_1 - \mathrm{I}_1)] = 2 d_0 d_1 \psi, \\ d_1[\psi'(\mathrm{J} + \mathrm{I})] + d_0[\psi'(\mathrm{J}_1 + \mathrm{I}_1)] = 2 \dfrac{\psi''}{\mathrm{K}} d\omega. \end{cases}$$

Par suite de l'indétermination de la fonction ψ de l'angle φ, le nombre des formes auxquelles conduisent les formules précédentes se trouve infini; nous verrons plus tard qu'il en est de même du nombre des théorèmes de Géométrie qui en sont la conséquence.

197. *Relations entre les équations des courbures des lignes coordonnées.* — Portons dans les équations (3) et (3') les variations des angles de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées données par les formules (9) et (10) du Chapitre I, nous trouvons

$$(2')\quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1}\right) - \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\mathrm{R}\lambda} + \frac{1}{\mathrm{R}_1\lambda_1}\right) + \frac{d_1 d_0 \varphi}{d\sigma\, d\sigma_1} = 0,$$

$$(3')\quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathrm{L}}\right) + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{L}_1}\right) - \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\mathrm{L}\lambda} + \frac{1}{\mathrm{L}_1\lambda_1}\right) - \frac{d_1 d_0 \varphi}{d\sigma\, d\sigma_1} = 0.$$

La première équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1}\right) - \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}_1^2} + \frac{2\cos\varphi}{\mathrm{R}\mathrm{R}_1}\right)$$
$$- \frac{d\varphi}{\sin\varphi\, d\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{R}_1}\right) - \frac{d\varphi_1}{\sin\varphi\, d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{\cos\varphi}{\mathrm{R}}\right) + \frac{d_1 d_0 \varphi}{d\sigma\, d\sigma_1} = 0,$$

et la deuxième s'écrira sous la forme

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L_1}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{L_1^2}+\frac{2\cos\varphi}{LL_1}\right)-\frac{d_1^2 d_0\varphi}{d\sigma d\sigma_1}=0.$$

Si l'on porte les variations des angles de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées dans les formules (5), on trouve

$$(5')\qquad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{L\lambda}+\frac{1}{R_1\lambda_1}\right)=0. \qquad (2)$$

198. *Formules générales.* — Portons dans les équations [2] et [3] du n° **196** les variations des produits tels que $I\psi'$, $J\psi'$ donnés par les formules (11) du Chapitre I, nous trouvons :

$$[2']\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{\psi'}{R}\right)+\dfrac{d}{d\sigma}\left(\dfrac{\psi'}{R_1}\right) \\ \qquad -\dfrac{\psi'}{\sin\varphi}\left(\dfrac{1}{R\lambda}+\dfrac{1}{R_1\lambda_1}\right)+\dfrac{d_0 d_1\psi}{d\sigma d\sigma_1}=\dfrac{\psi''\sin\varphi}{K}, \end{cases}$$

$$[3']\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{\psi'}{L}\right)+\dfrac{d}{d\sigma}\left(\dfrac{\psi'}{L_1}\right) \\ \qquad -\dfrac{\psi'}{\sin\varphi}\left(\dfrac{1}{L\lambda}+\dfrac{1}{L_1\lambda_1}\right)-\dfrac{d_0 d_1\psi}{d\sigma d\sigma_1}=\dfrac{\psi''\sin\varphi}{K}, \end{cases}$$

qui, malgré leur généralité, n'en affectent pas moins une forme tout à fait simple.

199. *Discussion des formules précédentes.* — 1° Si les deux séries des lignes coordonnées se composent de cercles, les courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$ sont constantes, et la formule (2') donne la relation suivante :

$$\frac{d_0 d_1\varphi}{d\sigma d\sigma_1}=\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{R\lambda}+\frac{1}{R_1\lambda_1}\right).$$

2° Si l'une des deux séries, la série (ρ_1) se compose de lignes

droites, on obtient l'équation

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{1}{R_1\lambda_1}+\frac{d_0 d_1\varphi}{d\sigma d\sigma_1}=0.$$

3° Si les coordonnées se coupent sous un angle constant, on a la formule

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\cos\varphi}{RR_1}\right)=0.$$

4° Si la série (ρ_1) se compose de cercles et la série (ρ) de lignes droites, on a la relation

$$\frac{1}{R\lambda\sin\varphi}=\frac{d_0 d_1\varphi}{d\sigma d\sigma_1},$$

laquelle revient à la suivante :

$$\sin\varphi\,\frac{d_0 d_1\varphi}{d\sigma d\sigma_1}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\left(\frac{d_0\varphi}{d\sigma}+\frac{d_1\varphi}{d\sigma_1}\cos\varphi\right).$$

200. *Relations entre les variations des arcs coordonnés.* — Portons dans les formules (2) les valeurs de I, I_1 tirées des équations (6) du Chapitre I, nous obtenons la formule suivante :

$$(2'')\quad \left\{\begin{aligned} & d_1\left[\frac{d_1 d\sigma - d_0(d\sigma_1\cos\varphi)}{d\sigma_1\sin\varphi}\right]\\ & + d_0\left[\frac{d_0 d\sigma_1 - d_1(d\sigma\cos\varphi)}{d\sigma\sin\varphi}\right]-d_0 d_1\varphi=0,\end{aligned}\right.$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(3'')\quad d_1\left(\frac{\cos\varphi\, d_0 d\sigma_1 - d_1 d\sigma}{d\sigma_1\sin\varphi}\right)-d_0\left[\frac{d_0 d\sigma_1 - d_1(d\sigma_1\cos\varphi)}{d\sigma\sin\varphi}\right]=0.$$

1° Si une des deux séries, (ρ_1) par exemple, se compose de lignes droites, on obtient la formule

$$d_0\left[\frac{d_0 d\sigma_1 - d_1(d\sigma\cos\varphi)}{d\sigma\sin\varphi}\right]-d_0 d_1\varphi=0;$$

or, par suite de l'équation (6) du Chapitre I, on a

$$d_1 d\sigma - d_0 (d\sigma_1 \cos\varphi) = 0,$$

et, en ayant égard à cette relation, l'équation précédente devient

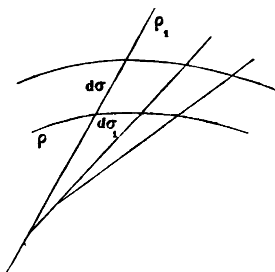
$$\frac{d_0^2 (d\sigma_1 \sin\varphi)}{d\sigma^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} \sin\varphi = \rho f(\rho_1) + A,$$

f étant une fonction arbitraire et A une constante : telle est donc la forme de la fonction qui représente l'arc orthogonal; c'est ce que l'on voit directement (*fig.* 73); car, si l'on appelle ρ la

Fig. 73.



longueur de l'arc et $d\varepsilon$ l'angle compris entre deux droites infiniment voisines, on a l'expression

$$d\sigma_1 \sin\varphi = \rho\, d\varepsilon;$$

or

$$d\varepsilon = f(\rho_1)\, d\rho_1.$$

Donc :

2° Si les deux séries de lignes coordonnées sont rectilignes, l'équation (2″) se réduit au terme unique

$$d_1 d_0 \varphi = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\varphi = F(\rho) + F_1(\rho_1),$$

F et F_1 étant deux fonctions arbitraires, la première du paramètre ρ et la seconde du paramètre ρ_1; telle est donc dans ce cas la forme de l'angle des lignes coordonnées.

3° Si les deux lignes coordonnées se coupent sous angle droit, on trouve la formule connue

$$\frac{d_1^2 \, d\sigma}{d\sigma_1} + \frac{d_0^2 \, d\sigma_1}{d\sigma} = 0.$$

201. *Formules générales.* — Portons dans les formules [3] les valeurs des angles de contingence I, I_1 donnés par les formules (6), nous obtiendrons l'équation

$$d_1\left[\frac{\psi'}{\sin\varphi}\,\frac{d_1 d\sigma - d_0(d\sigma_1 \cos\varphi)}{d\sigma_1}\right] + d_0\left[\frac{\psi'}{\sin\varphi}\,\frac{d_0 d\sigma_1 - d_1(d\sigma \cos\varphi)}{d\sigma_1}\right] = -\frac{\psi'' d\omega}{K} + d_0 d_1 \psi,$$

laquelle se rapporte à toutes les formes de la fonction ψ.

Dans le cas où les deux séries de lignes coordonnées sont des droites, elle se réduit à l'équation binôme

$$d_0\, d_1 \psi = \psi'' \frac{d\omega}{K},$$

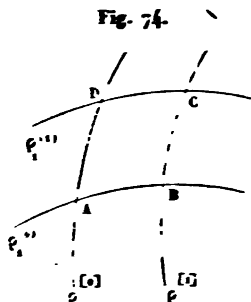
$$d_0\, d_1 \psi = \psi'' d\sigma d\sigma_1 \left(\frac{1}{LL_1} - \frac{1}{RR_1}\right).$$

202. *Des quadrilatères curvilignes.* — Considérons (*fig.* 74) le quadrilatère curviligne déterminé par les lignes $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$ de la série (ρ) coupées par les lignes $\rho_1^{(0)}$, $\rho_1^{(1)}$ de la série (ρ_1); ce quadrilatère jouit de propriétés géométriques que nous allons démontrer.

Intégrons les deux membres des équations [3] deux fois de suite : une première fois par rapport à ρ et entre les deux courbes de la série (ρ) que forment les deux côtés opposés du quadrilatère, et une seconde fois par rapport à ρ_1, entre les

deux courbes de la série (ρ_1) qui forment les deux autres côtés opposés; si nous représentons par A, B, C, D les quatre angles

Fig. 74.



du quadrilatère et par $d\sigma_i$, $\frac{1}{R_i}$, $\frac{1}{L_i}$ l'arc, la courbure propre et la courbure inclinée d'une quelconque des lignes qui limitent le quadrilatère, on aura les deux relations

$$\int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{(1)}}\int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(1)}} \frac{\psi'' \sin\varphi \, d\sigma \, d\sigma_1}{K}$$
$$= \psi(A) - \psi(\pi - B) + \psi(C) - \psi(\pi - D) + \int \frac{d\sigma_i}{R_i}\psi'(\varphi),$$

$$\int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[1]}}\int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(1)}} \frac{\psi'' \sin\varphi \, d\sigma \, d\sigma_1}{K}$$
$$= -\psi(A) + \psi(\pi - B) - \psi(C) + \psi(\pi - D) + \int \frac{d\sigma_i}{L_i}\psi'(\varphi),$$

dans lesquelles le signe $\int$ des derniers termes s'étend à tout le contour, et l'indice i doit être posé égal à zéro ou à l'unité, suivant que l'on intègre le long des lignes de la série ρ_1 ou de la série ρ.

Si le quadrilatère est rectiligne, les intégrales contenues dans le dernier terme de la première sont nulles, et l'on a

$$\int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[1]}}\int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(1)}} \frac{\psi'' \sin\varphi \, d\sigma \, d\sigma_1}{K}$$
$$= \psi(A) - \psi(\pi - B) + \psi(C) - \psi(\pi - D).$$

203. *Remarques sur ces formules.* — 1° Il importe de bien saisir le caractère géométrique de ces équations : il consiste en ce que l'élément $\frac{\psi''}{K}\,d\omega$, étendu à toute la surface du quadrilatère, dépend seulement, lorsque le quadrilatère est rectiligne, des quatre valeurs que prend la fonction ψ pour chacun des angles du quadrilatère ou de leurs angles complémentaires, et, lorsque le quadrilatère est quelconque, cet élément intégral surpasse les mêmes valeurs d'un terme complémentaire égal à l'intégrale de $\frac{d\sigma_i}{R_i}\psi'$ ou de $\frac{d\sigma_i}{L_i}\psi'$ étendue à tout le contour.

2° Il suit évidemment de là que l'on a le moyen de calculer l'intégrale définie double formant le premier membre des équations précédentes, sans pratiquer aucune intégration si le quadrilatère est curviligne. Ainsi, par exemple, dans le cas où la fonction $\psi(\varphi)$ est $\log\sin\varphi$, on a

$$\int\int\left(\frac{1}{RR_1}-\frac{1}{LL_1}\right)\frac{d\sigma\,d\sigma_1}{\sin^2\varphi}=\log\frac{\sin A\,\sin C}{\sin B\,\sin D}+\int\frac{d\sigma_i}{R_i}\cot\varphi.$$

Si l'on fait $\psi(\varphi)$ égal à φ, la valeur de ψ'' étant nulle, l'intégrale double s'évanouit et l'on trouve

$$A+B+C+D=2\pi-\int\frac{d\sigma_i}{R_i},$$

ce qui est un théorème évident, puisqu'il exprime que dans un quadrilatère curviligne la somme des angles extérieurs finis ou infiniment petits vaut quatre angles droits.



CHAPITRE III.

DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.

204. *Nature des paramètres différentiels.* — Dans la théorie des lignes coordonnées planes, il y a trois quantités qui jouent un rôle important : ce sont les deux rapports des arcs coordonnés aux variations des paramètres correspondants qui fixent la position du point sur chacune des lignes coordonnées, rapports que nous avons désignés par H, H_1 [formule (1) du n° 183], et, de plus, la racine carrée du produit de ces deux paramètres par le cosinus de l'angle des lignes coordonnées, produit que nous désignons par G et que l'on peut appeler *paramètre angulaire*. On a donc

$$d\sigma = H\,d\rho, \quad d\sigma_1 = H_1\,d\rho_1, \quad G^2 = HH_1 \cos\varphi;$$

ces trois paramètres H, H_1, G sont des fonctions des coordonnées ρ, ρ_1, lesquelles dépendent de la nature des lignes coordonnées.

Nous disons que leur rôle est très-important, puisque, lorsque ces quantités sont connues, tout ce qui intéresse la nature du système des lignes coordonnées peut être connu par suite d'un calcul facile sur ces trois paramètres. En effet, la courbure propre, la courbure inclinée, les angles de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées ne dépendent que de ces trois paramètres, d'après les formules (6) et (7) du Chapitre II; et il sera évident, par ce qui va suivre, que toutes les opérations sur les lignes coordonnées, telles que quadrature, rectifications, etc., ne dépendent aussi que des expressions de ces paramètres.

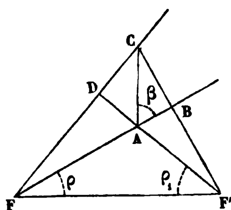
205. *Calcul des paramètres différentiels.* — Le calcul des

paramètres différentiels peut être fait de deux manières : ou bien directement, ou bien par voie de transformation.

Le calcul direct des paramètres H, H_1, G est le plus simple; il se fait géométriquement d'après la connaissance des lignes coordonnées; donnons quelques exemples de ce calcul.

Coordonnées birectilignes. — Soit (*fig.* 75) un système de

Fig. 75.



coordonnées birectilignes, les lignes de la première série passant par le point fixe F, et celles de la seconde passant par le point fixe F'. Soient ρ et ρ_1 les angles que les lignes de la première et de la seconde série font avec la droite fixe FF' dans l'intérieur du triangle FAF'; ρ et ρ_1 sont les coordonnées du système; soient $2a$ la distance FF' et r, r_1 les rayons vecteurs AF, AF_1. Cela posé, si l'on considère les deux triangles infinitésimaux DAF, BAF', on a, en appelant AD, $d\sigma$ et AB, $d\sigma_1$ les deux relations

$$d\sigma = r d\rho \sin(\rho + \rho_1), \quad d\sigma_1 = r_1 d\rho_1 \sin(\rho + \rho_1);$$

or le triangle AFF donne

$$\frac{r}{\sin\rho_1} = \frac{r_1}{\sin\rho} = \frac{2a}{\sin(\rho + \rho_1)};$$

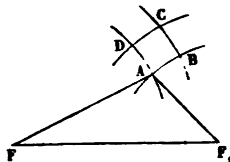
on a donc

$$H = 2a\sin\rho_1, \quad H_1 = 2a\sin\rho, \quad G^2 = -4a^2\sin\rho\sin\rho_1\cos(\rho+\rho_1).$$

206. *Coordonnées bicirculaires.* — Soient (*fig.* 76) deux séries de cercles concentriques : la première ayant F pour centre et r pour rayon; la seconde F_1 pour centre et r_1 pour

rayon; ici les paramètres qui fixent la position du point sont

Fig. 76.



r et r_1; conservons les mêmes notations que précédemment, on a

$$d\sigma_1 = r\,d\rho, \quad d\sigma = r_1\,d\rho_1;$$

on a, de plus,

$$d\rho = \frac{1}{2}\frac{r_1\,dr_1}{ar\sin\rho}, \quad d\rho_1 = \frac{1}{2}\frac{r\,dr}{ar_1\sin\rho_1}.$$

Si, pour abréger, on pose

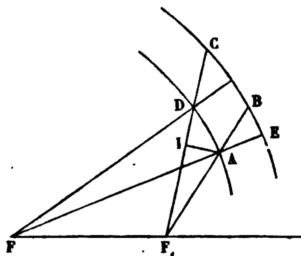
$$M^2 = \sqrt{(r+r_1+2a)(r+r_1-2a)(r-r_1+2a)(r_1-r+2a)},$$

on obtient

$$d\sigma = \frac{1}{2}\frac{rr_1\,dr}{M^2}, \quad d\sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{rr_1\,dr_1}{M^2}, \quad \cos\varphi = \frac{4a^2-r^2-r_1^2}{2rr_1}.$$

207. *Coordonnées rectiligne et circulaire.* — Considérons (*fig.* 77) le système composé de cercles concentriques et de

Fig. 77.



droites passant par un même point. Soit F le centre commun

des cercles de rayon r, et F_1 le point de concours des droites formant un angle ρ avec le prolongement de FF_1; r et ρ sont les coordonnées.

Conservons la même notation que ci-dessus, et soit AI l'arc infiniment petit décrit entre deux positions de r_1, on a

$$AB = \frac{AE}{\sin\varphi}, \quad AD = \frac{AI}{\sin\varphi};$$

donc

$$d\sigma = \frac{dr}{\cos(\rho_1 - \rho)}, \quad d\sigma_1 = \frac{r_1\, d\rho_1}{\cos(\rho_1 - \rho)},$$

avec les relations

$$\frac{r}{\sin\rho_1} = \frac{r_1}{\sin\rho} = \frac{2a}{\sin(\rho_1 - \rho)}.$$

On en déduit

$$\sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - 4a^2\sin^2\rho_1},$$

$$d\sigma_1 = \left(r - \frac{2ar\cos\rho_1}{\sqrt{r^2 - 4a^2\sin^2\rho_1}}\right)d\rho_1, \quad d\sigma = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - 4a^2\sin^2\rho_1}}.$$

Coordonnées polaires. — Comme vérification de ces dernières formules, cherchons les paramètres différentiels du système de coordonnées polaires; il faut, dans ce cas, supposer que les points F et F_1 coïncident, ce qui revient à poser a nul; on obtient alors

$$d\sigma_1 = r\,d\rho_1, \quad d\sigma = dr, \quad \cos\varphi = 0.$$

208. *Calcul par transformation.* — Soient (*fig.* 74) les deux courbes coordonnées données par les deux équations dans le système cartésien

$$(2) \qquad f(xy) = \rho, \quad f_1(xy) = \rho_1,$$

ρ et ρ_1 étant les paramètres dont les variations produisent les deux séries de lignes coordonnées. Si l'on résout ces deux

équations par rapport à x et à y, on aura les deux relations

$$(3) \qquad x = F(\rho, \rho_1), \quad y = F_1(\rho, \rho_1).$$

Le paramètre ρ_1 ne variant pas le long de la courbe ρ_1, et le paramètre ρ le long de la courbe ρ_1, on aura les expressions des arcs coordonnés

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} = \left(\frac{dx^2}{d\rho^2} + \frac{dy^2}{d\rho^2}\right) = H^2, \quad \frac{d\sigma_1^2}{d\rho_1^2} = \frac{dx^2}{d\rho_1^2} + \frac{dy_1^2}{d\rho_1^2} = H_1^2, \\ &\cos\varphi \frac{d\sigma}{d\rho}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} = \frac{dx}{d\rho}\frac{dx_1}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dy_1}{d\rho_1} = G^2. \end{aligned} \right.$$

On connaîtra donc les paramètres H, H_1, G en fonctions des coordonnées ρ et ρ_1, ce qui est la solution complète de la question.

Elle peut aussi être résolue de la manière suivante. Posons

$$(5) \quad \frac{d\rho^2}{dx^2} + \frac{d\rho^2}{dy^2} = h^2, \quad \frac{d\rho_1^2}{dx^2} + \frac{d\rho_1^2}{dy^2} = h_1^2, \quad \frac{d\rho\, d\rho_1}{dx\, dx} + \frac{d\rho\, d\rho_1}{dy\, dy} = g^2,$$

équations qui se rapportent aux deux courbes représentées par les équations (2); il en résulte que

$$(6) \qquad \cos\varphi = \frac{g^2}{hh_1}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{hh_1}\sqrt{h^2h_1^2 - g^4}.$$

Soit $\delta\rho$ le déplacement du point A dans une direction quelconque, δx, δy étant les projections de ce déplacement sur les deux axes des x et des y; si nous prenons la variation de la première des équations (2), on a

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{dx}\delta x + \frac{d\rho}{dy}\delta y.$$

Donc, en divisant les deux membres par $h\delta s$, le second membre devient égal au cosinus de l'angle du déplacement δs avec la normale n à la courbe ρ; on a donc la formule

$$(7) \qquad \frac{\delta s}{\delta\rho} = \frac{1}{h\cos(n, ds)}.$$

Si le déplacement δs est compté dans le sens de la courbe $d\sigma_1$, on aura, après avoir opéré de la même manière sur la courbe f_1, les deux équations

$$(1') \qquad \frac{d\sigma}{d\rho} = \frac{1}{h \sin\varphi}, \quad \frac{d\sigma_1}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1 \sin\varphi}.$$

Si l'on compare les équations (1) aux équations (1'), on en déduira les relations

$$(8) \qquad \mathrm{H}h = \mathrm{H}_1 h_1 = \frac{1}{\sin\varphi},$$

et, conséquemment,

$$(9) \quad \mathrm{H} = \frac{h_1}{\sqrt{h^2 h_1^2 - g^4}}, \quad \mathrm{H}_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2 h_1^2 - g^4}}, \quad \mathrm{G} = \frac{g}{\sqrt{h^2 h_1^2 - g^4}};$$

on pourra donc calculer les paramètres H, H_1, G au moyen des auxiliaires h, h_1, g, et réciproquement.

Appliquons ces formules à quelques exemples; mais, avant, remarquons que, l'équation d'une courbe exprimant par voie d'égalité une relation entre un point quelconque de la courbe et une ou plusieurs grandeurs géométriques, cette courbe partage le plan qui la contient en deux régions telles, que la relation ne peut être satisfaite par un point quelconque de l'une de ces régions, par excès pour l'une et par défaut pour l'autre. C'est la première de ces régions qui est appelée *région extérieure* à la courbe, et la seconde *région intérieure*. Or nous convenons de compter les normales à une courbe à partir de ce point vers la région extérieure. Cela posé, représentons par n une normale infiniment petite à la courbe coordonnée

$$f(x, y) - \rho = 0.$$

Si l'on remarque que les coordonnées de l'extrémité de cette normale extérieure à la courbe sont

$$x + n\cos(n, x), \quad y + n\cos(n, y),$$

le résultat de la substitution de ces coordonnées dans l'équation précédente sera positif; or, en négligeant l'infiniment

petit d'ordre supérieur, ce résultat est

$$n\left[\frac{d\rho}{dx}\cos(n,x)+\frac{d\rho}{dy}\cos(n,y)\right];$$

donc, en y remplaçant les cosinus par leurs valeurs $\frac{d\rho}{h\,dx}$, $\frac{d\rho}{h\,dy}$, on obtiendra le produit nh essentiellement positif, ce qui exige que l'on affecte du signe $+$ le radical h.

Donc, suivant qu'il s'agit de la normale extérieure ou intérieure, il faut prendre h avec le signe $+$ ou le signe $-$.

209. *Coordonnées elliptiques homofocales.* — Dans ce système de coordonnées, on prend, pour déterminer un point quelconque du plan, une série d'ellipses et une série d'hyperboles, homofocales, dont les équations sont

$$(2')\qquad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}-\frac{y^2}{c^2-\rho_1^2}=1,$$

et dans lesquelles il faut poser

$$\rho>c>\rho_1;$$

on en déduit les relations

$$(3')\qquad cx=\rho\rho_1,\qquad cy=\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2};$$

$$(4')\qquad \frac{d\sigma}{d\rho}=\frac{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2-c^2}},\quad \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}=\frac{\sqrt{\rho_1^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho_1^2-c^2}};$$

et, de plus, on trouve que la valeur de $\cos\varphi$ est nulle, ce qui revient à dire que le système est orthogonal.

210. *Coordonnées elliptiques homocycliques.* — Prenons pour système de coordonnées une série d'ellipses doublement tangentes à deux cercles égaux de rayon l, et une série d'hyperboles doublement tangentes aux mêmes cercles; on aura les deux équations, e étant la demi-distance des centres des

deux cercles,

$$(2'')\quad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-e^2}=1+\frac{l^2}{\rho^2-e^2},\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-e^2}=1+\frac{l^2}{\rho_1^2-e^2},$$

et, conséquemment, les équations (3″) seront

$$(3'')\qquad x=\frac{\rho\rho_1}{e},\quad y=\frac{\sqrt{(\rho^2-e^2)(e^2-\rho_1^2)+l^2e^2}}{e};$$

on déduira

$$(4'')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{d\rho^2}&=\frac{(e^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_1^2)+l^2\rho_1^2}{(\rho^2-e^2)(e^2-\rho_1^2)+l^2e^2},\\ \frac{d\sigma_1^2}{d\rho_1^2}&=\frac{(\rho^2-e^2)(\rho^2-\rho_1^2)+l^2\rho^2}{(\rho^2-e^2)(e^2-\rho_1^2)+l^2e^2},\\ \frac{d\sigma}{d\rho}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\cos\varphi&=\frac{l^2\rho\rho_1}{(\rho^2-e^2)(e^2-\rho_1^2)+l^2e^2}, \end{aligned}\right.$$

desquelles on déduit la valeur de $\cos\varphi$,

$$\cos\varphi=\frac{l^2\rho\rho_1}{\sqrt{(e^2-\rho_1^2)(\rho^2-\rho_1^2)+l^2\rho_1^2}\,\sqrt{(\rho^2-e^2)(\rho^2-\rho_1^2)+l^2\rho^2}}.$$

Il est bon de remarquer que 2ρ représente la somme des tangentes t, t_1 menées d'un point aux deux cercles, et $2\rho_1$ la différence des mêmes tangentes; on a donc

$$2\rho=t+t_1,\quad 2\rho_1=t-t_1.$$

211. *Éléments des lignes coordonnées en fonction des paramètres différentiels.* — Nous nous proposons maintenant de calculer les divers éléments des lignes coordonnées en fonction des paramètres différentiels.

Angle des lignes coordonnées. — Le sinus et le cosinus de cet angle sont donnés par les deux formules

$$\cos\varphi=\frac{G^2}{HH_1},\quad \sin\varphi=\frac{1}{HH_1}\sqrt{H^2H_1^2-G^4},$$

et la variation de l'angle est donnée par la formule

$$(10)\qquad \frac{d_0 \varphi}{d\sigma} = \frac{H_1 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{G^2}{HH_1}\right)}{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}. \qquad (2)$$

Aire d'un quadrilatère curviligne. — Deux courbes $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$ de la série (ρ) coupées par deux courbes $\rho_1^{(0)}$, $\rho_1^{(1)}$ de la série (ρ_1) des lignes coordonnées déterminent un quadrilatère; l'aire U de ce quadrilatère a pour expression

$$U = \int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[1]}} \int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(1)}} HH_1\, d\rho\, d\rho_1.$$

et, si l'on représente par D une grandeur analogue à la densité et variant avec la position du point, et par V une expression analogue au poids du quadrilatère, on aura

$$V = \int_{\rho^{[0]}}^{\rho^{[1]}} \int_{\rho_1^{(0)}}^{\rho_1^{(1)}} DHH_1\, d\rho\, d\rho_1,$$

212. *Expressions de courbures propres ou inclinées.* — Les formules (6′) et (7′) des nos 188, 189 donneront

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{R} &= -\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{G^2}{H}\right), \\ \frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{L} &= -\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{G^2}{HH_1}\frac{dH_1}{d\rho}. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Nous avons été conduit à introduire les projections orthogonales $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda_1}$ sur les directions de L, L_1 de la résultante des courbures $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L_1}$; on aura, d'après les formules (8″) du Liv. III, Chap. I,

$$(12)\qquad \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{d_0 H_1}{d\rho}\,\frac{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}}{H^2H_1^2}. \qquad (2)$$

Variations des angles de contingence propre ou inclinée. —

Les formules (6) et (7) du n° 188 et du n° 189 donneront les expressions suivantes :

$$
(13)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{d_1 \mathrm{I}}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{d_1}{d\rho_1}\left[\frac{-\mathrm{H}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} + \mathrm{H}\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{H}}\right)}{\sqrt{\mathrm{H}^2\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}^4}}\right], \\
\frac{d\mathrm{J}}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{d}{d\rho_1}\left[\frac{\dfrac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{H}_1}\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho} - \dfrac{\mathrm{H}\,d\mathrm{H}}{d\rho_1}}{\sqrt{\mathrm{H}^2\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}^4}}\right].
\end{aligned} \right\} \quad (2)
$$

Ces différentes formules établissent surabondamment le rôle capital que jouent les trois paramètres différentiels.

213. *De la nature des paramètres différentiels.* — Chaque système de lignes coordonnées produit un système correspondant de paramètres différentiels H, H_1, G; des caractères spéciaux appartiennent à chacun de ces systèmes. Ceux qui affectent les paramètres H, H_1 sont relatifs aux déplacements effectués sur les arcs coordonnés, ceux qui affectent G sont relatifs à l'angle sous lequel se coupent ces arcs coordonnés.

Examinons d'abord quelques caractères résultant de la forme du paramètre G. Si ce paramètre est nul, le système des lignes coordonnées est orthogonal. Cette circonstance se présente dans le système polaire indiqué à la fin du n° 207, et dans le système de coordonnées elliptiques du n° 209.

Si le rapport de G^2 au produit HH_1 est constant, les lignes coordonnées se coupent toujours sous le même angle; cela a lieu lorsque les lignes de la première série sont des cercles tangents à l'un des côtés d'un angle en son sommet, et que les lignes de la seconde série sont aussi des cercles tangents à l'autre côté de l'angle au même sommet.

Lorsque ce rapport est égal à la somme de deux fonctions, l'une du paramètre ρ et l'autre du paramètre ρ_1, les deux séries de lignes coordonnées sont rectilignes. Cette condition est nécessaire et suffisante, comme nous l'avons trouvé au n° 200, et comme nous l'avons vérifié par un exemple au n° 205.

Examinons, en second lieu, certains caractères résultant des formes des paramètres H et H_1.

Dans certains systèmes de coordonnées, les paramètres H et H_1 sont égaux entre eux; ces systèmes jouissent de propriétés particulières qui ont été étudiées par M. Liouville. Ce cas se présente dans le système de coordonnées bicirculaires étudié dans le n° 206. Si, de plus, la valeur commune de ces paramètres différentiels est telle que son carré soit égal à la somme de deux fonctions, l'une du paramètre ρ et l'autre du paramètre ρ_1, l'équation différentielle du second ordre de la ligne géodésique tracée sur une surface quelconque a une intégrale première (*). Ce cas se présente dans le système des coordonnées elliptiques, puisque les carrés des deux paramètres différentiels se ramènent par une transformation facile à la somme de deux fonctions, chacune d'une seule variable. Ceci permet, lorsqu'il s'agit de coordonnées elliptiques planes, de représenter la tangente à une des coniques homofocales d'un système par une équation différentielle de forme expressive.

Dans d'autres systèmes de coordonnées, les paramètres différentiels H, H_1 ne dépendent chacun que d'une seule variable; c'est ce qui se présente dans le système de coordonnées birectilignes, comme on l'a vu au n° 205.

Mais le cas le plus intéressant est celui qui se présente dans le système curvo-rectiligne orthogonal, parce qu'alors un des paramètres différentiels est l'unité et l'autre une fonction d'une seule variable. C'est la forme particulière de ces paramètres qui paraît se prêter le plus facilement à la résolution des questions sur l'analyse des courbes, comme la chose a été surabondamment établie dans notre Livre I.

(*) *Voir* notre *Analyse infinitésimale des lignes tracées sur une surface quelconque*, p 194.

CHAPITRE IV.

D'UNE COURBE QUELCONQUE RAPPORTÉE A DES COORDONNÉES CURVILIGNES.

214. *Longueur et direction de l'arc.* — Soit une courbe s quelconque tracée sur un plan et rapportée à un système de coordonnées curvilignes; cette courbe, traversant le réseau des lignes coordonnées, sera appelée *trajectoire*. L'élément ds est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres sont $d\sigma$, $d\sigma_1$; en appelant α, β les angles que cet élément forme avec $d\sigma$, $d\sigma_1$, on aura les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{\sin\varphi}=\frac{d\sigma}{\sin\beta}=\frac{d\sigma_1}{\sin\alpha}; \quad \varphi=\alpha+\beta;\\ &ds\cos\alpha=d\sigma+d\sigma_1\cos\varphi, \quad ds\cos\beta=d\sigma_1+d\sigma\cos\varphi;\\ &ds^2=d\sigma^2+d\sigma_1^2+2\,d\sigma\,d\sigma_1\cos\varphi,\end{aligned}\right.$$

lesquelles font connaître la direction de l'élément ds par rapport aux lignes coordonnées, ainsi que la grandeur de cet élément.

Rectification. — L'équation de la courbe est une relation entre les paramètres ρ et ρ_1. Soit cette équation

$$(2)\qquad \rho_1=f(\rho);$$

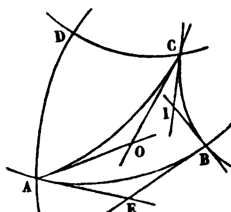
la différentielle ds de l'arc de courbe ne sera donc fonction que d'une seule variable ρ; donc l'intégrale de cette différentielle entre les deux valeurs de ρ, $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$ donnera la longueur de l'arc s compris entre les deux courbes $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$ de la série ρ.

Qadrature. — L'aire du quadrilatère infinitésimal des lignes coordonnées a pour expression $d\sigma d\sigma_1 \sin\varphi$; si l'on intègre une première fois par rapport à ρ_1, entre les valeurs de ρ_1, $\rho_1^{(0)}$,

$\rho_1 = f(\rho)$ et le résultat entre deux valeurs de ρ, $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$, on aura l'aire du trapèze curviligne, limité par la courbe et les trois lignes $\rho^{[0]}$, $\rho^{[1]}$, $\rho_1^{(0)}$.

215. *Angle de contingence de la courbe s.* — Soient Ω cet angle de contingence et P le rayon de courbure correspondant; si aux trois sommets du triangle dont les côtés sont $d\sigma$, $d\sigma_1$, ds on mène (*fig.* 78) des tangentes aux arcs, on forme un hexa-

Fig. 78.



gone dont la propriété, relative à la somme des six angles qui sont α, $\pi - \mathrm{I}$, $\pi - \varphi - d_0\varphi$, $\mathrm{I}_1 + d_0\mathrm{I} + \pi$, $\beta + d\beta$, $\Omega + \pi$, donnera l'une ou l'autre des relations

$$(3) \qquad \Omega = \mathrm{I} - \mathrm{I}_1 + d_0\varphi - d\beta = \mathrm{I} - \mathrm{I}_1 + d\alpha - d_1\varphi,$$

dans laquelle il a fallu négliger les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Cette équation, lorsqu'on utilise la relation

$$\varphi = \alpha + \beta,$$

peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$(3') \qquad \Omega - \mathrm{I} + \mathrm{I}_1 - d_0\alpha + d_1\beta = 0.$$

Cette formule fait connaître l'angle de contingence de la courbe s en fonction des angles de contingence des lignes coordonnées et des variations des angles que la courbe fait avec les deux lignes coordonnées.

Si l'on a égard aux formules (1) du Liv. III, Chap. II, on

obtiendra

$$(5') \qquad \Omega - J + J_1 + d_0\beta - d_1\alpha = 0,$$

laquelle fait connaître l'angle de contingence de la courbe s en fonction des angles de contingence inclinée des lignes coordonnées.

De même, il y a deux équations relatives aux angles de contingence inclinée analogues aux équations (3),

$$(5) \qquad \Omega = J - J_1 + d_1\varphi - d\beta = J - J_1 - d_0\varphi + d\alpha.$$

Ces formules subiront des simplifications lorsque l'angle φ sera constant, ou bien lorsque les courbes coordonnées deviendront des droites. Nous passons sur ces réductions qui sont intuitives.

Les formules (3) et (3') donnent l'angle de contingence Ω de la courbe s en fonction des angles de contingence des lignes coordonnées.

Les formules (5) et (5') donnent le même angle en fonction des angles de contingence inclinée des lignes coordonnées.

Il y a une troisième catégorie de formules qui donnent ce même angle en fonction des angles de contingence propre et de contingence inclinée des lignes coordonnées. Ces formules sont

$$(4) \qquad \Omega = J - I_1 - d\beta = I - J_1 + d\alpha.$$

Dans toutes ces formules, la caractéristique d indique une différentielle totale.

Ces dernières formules montrent que, suivant que la trajectoire ds formera un angle constant avec $d\sigma_1$ ou avec $d\sigma$, on aura l'une ou l'autre de ces relations

$$\Omega = J - I_1, \quad \Omega = I - J_1,$$

et que ces deux relations auront lieu à la fois lorsque, l'une des deux conditions précédentes ayant lieu, l'angle φ des lignes coordonnées sera constant.

216. *Courbure de la trajectoire.* — Remplaçons dans les

formules (4) les angles de contingence propre ou inclinée par le rapport des arcs aux rayons de courbure propre ou inclinée correspondants, et substituons aux arcs les sinus correspondants qui leur sont proportionnels d'après les équations (1), on aura

$$[4]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\sin\beta}{L} - \frac{\sin\alpha}{R_1} - \frac{d\beta\sin\varphi}{ds},\\ \frac{\sin\varphi}{P} &= -\frac{\sin\alpha}{L_1} + \frac{\sin\beta}{R} + \frac{\sin\varphi\, d\alpha}{ds}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (3) et (3′), (5) et (5′) donneraient naissance à des formules analogues que nous nous dispensons d'écrire, et qui toutes donneraient des expressions équivalentes de la courbure de la trajectoire.

217. *Courbure inclinée de la trajectoire.* — Les tangentes à la série ρ_1 des lignes coordonnées coupent la trajectoire sous l'angle β. Soient $\mathfrak{L}_\beta$ le rayon de courbure inclinée de cette trajectoire, $\mathfrak{I}_\beta$ l'angle de contingence inclinée sous l'angle β de cette trajectoire; de même les tangentes de la série ρ coupent la trajectoire sous l'angle α; soient $\mathfrak{L}_\alpha$ et $\mathfrak{I}_\alpha$ le rayon de courbure inclinée et l'angle de contingence inclinée sous l'angle α de la trajectoire; donc les équations [4] deviendront

$$(6)\qquad \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{L}_\beta} = \frac{\sin\beta}{L} - \frac{\sin\alpha}{R_1},\qquad \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{L}_\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{L_1} + \frac{\sin\beta}{R}.$$

De là résulte que les extrémités des rayons $\mathfrak{L}_\beta$, L, R_1, ainsi que les extrémités des trois rayons $\mathfrak{L}_\alpha$, R_1, L_1, pris avec leur signe et portés dans la direction des éléments ds, $d\sigma_1$, $d\sigma$, sont en ligne droite.

Il en résulte des constructions faciles des rayons de courbure droite ou inclinée de la trajectoire au moyen des rayons de courbure droite ou inclinée des lignes coordonnées.

Il est bon de remarquer que, si la trajectoire ds coupe la série (ρ_1) ou la série (ρ) des lignes coordonnées sous un angle constant, les formules [4] montrent que dans le premier cas les extrémités des rayons P, L_1, R, et dans le second cas les extrémités des rayons P, R_1, L sont en ligne droite, pourvu

que dans les deux cas les rayons soient portés dans la direction de ds, $d\sigma_1$, $d\sigma$ à partir du point que l'on considère sur la trajectoire.

218. *Expression de la courbure de la trajectoire ds en fonction des variations des arcs coordonnés.* — Appliquons la formule (6) du n° 188 à l'arc ds coupé par l'arc $d\sigma$, il faudra considérer le déplacement par rapport à ds comme étant complet et correspondant à la variation d, et le déplacement par rapport à $d\sigma$ comme partiel et correspondant à la variation d_0; on obtient ainsi

$$\frac{ds\,d\sigma\sin\alpha}{P} = d_0 ds - d(d\sigma\cos\alpha);$$

or, si l'on remarque que le triangle dont les côtés sont $ds, d\sigma, d\sigma_1$ donne la relation

$$ds = d\sigma\cos\alpha + d\sigma_1\cos\beta,$$

que $d = d_0 + d_1$, le second membre se transforme par suite de ces relations; si de plus on élimine du premier membre ds au moyen des premières formules (1), on tombe sur l'équation aussi simple qu'expressive

$$(7) \qquad \frac{d\sigma\,d\sigma_1\sin\varphi}{P} = d_0(d\sigma_1\cos\beta) - d_1(d\sigma\cos\alpha).$$

Maintenant, si nous représentons par $d\omega$ l'aire du quadrilatère curviligne dont les côtés sont $d\sigma$, $d\sigma_1$, par $d\nu$ et $d\nu_1$ les projections de ses deux côtés sur la diagonale ds, on obtient l'expression non moins simple

$$(7') \qquad \frac{1}{P} = \frac{d_0(d\nu_1) - d_1(d\nu)}{d\omega},$$

laquelle conduit à ce théorème, que nous avons fait le premier connaître :

THÉORÈME. — *La courbure d'une courbe est le quotient de la différence des variations des projections des arcs coordonnés élémentaires sur la direction de la courbe par l'aire du qua-*

drilatère de ces arcs coordonnés, ces variations étant prises par rapport aux paramètres correspondant à ces arcs.

219. ***Éléments d'une trajectoire en fonction des paramètres différentiels du premier ordre et des dérivées de l'équation de la courbe.*** — Soit l'équation de la trajectoire mise sous la forme

$$u = \psi(\rho, \rho_1) = \text{const.}$$

Représentons par u', u'_1 les dérivées de u par rapport à ρ et ρ_1, on aura l'équation

$$(2) \qquad u'\,d\rho + u'_1\,d\rho_1 = 0.$$

Longueur de l'élément ds. — Si l'on pose, pour abréger,

$$K^2 = H^2 u_1'^2 + H_1^2 u'^2 - 2G^2 u' u'_1,$$

la valeur de ds donnée par la dernière des formules (1) conduit, suivant qu'on en éliminera $d\rho$ ou $d\rho_1$ au moyen de l'équation (2′), aux deux valeurs suivantes :

$$\frac{ds}{K} = \frac{d\rho}{u'_1} = -\frac{d\rho_1}{u'}.$$

Direction de l'élément ds. — Les autres formules (1) prennent la forme suivante :

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{K}{\sqrt{H^2H_1^2 - G^4}} &= \frac{u'_1}{H_1 \sin\beta} = -\frac{u'}{H \sin\alpha}, \\ K &= \frac{H^2 u'_1 - G^2 u'}{H \cos\alpha} = -\frac{H_1^2 u' - G^2 u'_1}{H_1 \cos\beta}; \end{aligned} \right.$$

ces formules donnent les expressions des sinus et des cosinus des angles α, β que la trajectoire fait avec les lignes coordonnées.

Variation de l'angle des lignes coordonnées. — On obtient, par la différentiation de l'équation

$$\cos\varphi = \frac{G^2}{HH_1},$$

les deux formules suivantes, qui donnent les variations de φ par rapport aux paramètres ρ, ρ_1 :

$$(8) \qquad -\sqrt{1-\frac{G^4}{H^2H_1^2}} = \frac{\frac{d}{d\rho}\left(\frac{G^2}{HH_1}\right)}{\frac{d\varphi}{d\rho}} = \frac{\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{G^2}{HH_1}\right)}{\frac{d\varphi}{d\rho_1}}.$$

Courbure de la trajectoire. — Elle résulte de la formule (7), laquelle donne

$$\frac{\sqrt{H^2H_1^2-G^4}}{P} = \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{H^2u'_1-G^2u'}{K}\right) + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{H'_1u'-G^2u'_1}{K}\right).$$

220. ***Angle de deux courbes en leur point d'intersection.*** — Soient les équations de ces deux courbes, u et v étant des fonctions de ρ et ρ_1,

$$(9) \qquad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

Soient ds et δs les éléments d'arc de ces deux courbes; $d\sigma, d\sigma_1$, $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ les composantes obliques de ces deux éléments suivant les lignes coordonnées; α, α_1 les angles que ces éléments font avec $d\sigma$, $\delta\sigma$. Soit φ_1 l'angle de ces deux courbes, on a

$$(10) \qquad \cos\varphi_1 = \cos(\alpha_1-\alpha), \quad \sin\varphi_1 = \sin(\alpha_1-\alpha);$$

si l'on développe les seconds membres et qu'on ait égard aux formules (1) relatives à chacun des éléments ds, δs, on trouve les deux équations

$$(11) \quad \begin{cases} ds\,\delta s\cos\varphi_1 = (d\sigma\,\delta\sigma + d\sigma_1\,\delta\sigma_1) + \cos\varphi(d\sigma\,\delta\sigma_1 + d\sigma_1\,\delta\sigma), \\ ds\,\delta s\sin\varphi_1 = \sin\varphi(d\sigma\,\delta\sigma_1 - d\sigma_1\,\delta\sigma); \end{cases}$$

or, si l'on appelle K_1 ce qui devient K, relativement à l'équation $v = \text{const.}$, v' et v'_1 les dérivées de v par rapport à ρ et ρ_1, on a aussi les relations

$$\frac{\delta s}{K_1} = \frac{\delta\rho}{v'_1} = -\frac{\delta\rho_1}{v'}.$$

Les équations précédentes donnent

$$(11')\quad \begin{cases} KK_1 \cos\varphi_1 = H^2 u'_1 v'_1 + H_1^2 u' v' - G^2(u' v'_1 + u'_1 v'), \\ KK_1 \sin\varphi_1 = - HH_1 \sin\varphi(u'_1 v' - u' v'_1), \end{cases}$$

dans lesquelles il n'entre que les paramètres différentiels du premier ordre des lignes coordonnées, et les dérivées partielles des équations des deux courbes ds, δs.

221. ***Passage d'un système de coordonnées curvilignes à un autre système.*** — Soit un second système de lignes coordonnées donné par les deux équations

$$u = \psi(\rho, \rho_1), \quad v = \psi_1(\rho, \rho_1),$$

et provenant des variations des paramètres u, v qui fixent dans ce nouveau système la position d'un point. On déduit des équations précédentes les valeurs de ρ et de ρ_1 en fonction des paramètres u et v. Soient ces valeurs

$$\rho = f(u, v), \quad \rho_1 = f_1(u, v);$$

les paramètres H, H_1, G relatifs aux variables ρ et ρ_1 sont connus, et la question présente consiste à calculer les paramètres différentiels du premier ordre relatifs aux variables u, v, paramètres que nous représentons par $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}$.

Or, si l'on conserve les notations précédentes, on a, par suite de la troisième des équations (1), les deux relations

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}^2 = H^2 \dfrac{df^2}{du^2} + H_1^2 \dfrac{df_1^2}{du^2} + 2G^2 \dfrac{df}{du}\dfrac{df_1}{du}, \\ \mathfrak{H}_1^2 = H^2 \dfrac{df}{dv^2} + H_1 \dfrac{df_1^2}{dv^2} + 2G^2 \dfrac{df}{dv}\dfrac{df_1}{dv}; \end{cases}$$

d'une autre part, la première des formules (11') donne

$$(13)\quad \mathfrak{G}^2 = H^2 \frac{df}{du}\frac{df}{dv} + H_1^2 \frac{df_1}{du}\frac{df_1}{dv} + G^2\left(\frac{df}{du}\frac{df_1}{dv} + \frac{df}{dv}\frac{df_1}{du}\right),$$

dans laquelle il faudra remplacer, dans H, H_1, G les variables ρ et ρ_1 par leurs valeurs en fonction u et v, données par les équations.

Cette solution du problème du changement des coordonnées est la plus générale qui puisse être donnée, et renferme comme cas particulier celles relatives au passage du système cartésien au système curviligne quelconque qui a été l'objet du n° **208**.



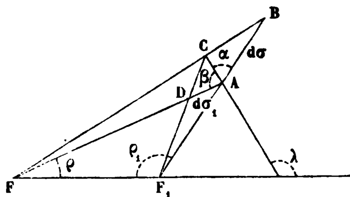
CHAPITRE V.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

222. *Des courbes magnétiques.* — Dans ces courbes, chaque élément d'arc est assimilé à une aiguille magnétique tournant sur un pivot, douée de deux pôles, l'un positif, l'autre négatif, et attirés ou repoussés par le pôle positif ou le pôle négatif d'un barreau aimanté, suivant que l'action a lieu entre deux pôles de même nom ou de nom contraire.

Soient (*fig.* 79) F et F_1 les deux pôles, l'un positif et l'autre

Fig. 79.



négatif du barreau; A et C les deux pôles, l'un positif et l'autre négatif de l'élément *ds*. Nous conservons les notations du n° 205 relatives au système de coordonnées birectilignes.

Soient ν^2, ν_1^2; n^2, n_1^2 les actions attractives de F sur C et de F_1 sur A, et les actions répulsives de F sur A et de F_1 sur C à l'unité de distance.

Soient $f(r)$, $f_1(r)$ les fonctions qui représentent la loi d'attraction et de répulsion; le moment résultant des actions exercées sur C est

$$\frac{ds^2}{2}\left[\nu^2 f(r)\sin\beta - n^2 f_1(r_1)\sin\alpha\right],$$

le moment résultant des actions exercées sur A est

$$\frac{ds^2}{2}[\nu_1^2 f(r_1)\sin\alpha - n_1^2 f_1(r)\sin\beta],$$

et comme ces deux moments doivent être égaux, on a

$$(1)\qquad [\nu^2 f(r) + n_1^2 f_1(r)]\sin\beta = [\nu_1^2 f(r_1) + n^2 f_1(r_1)]\sin\alpha,$$

qui est l'équation de la courbe relative à la direction de la tangente.

Si l'on remarque que l'on a les relations

$$\sin\alpha = -\frac{r_1\,d\rho_1}{ds},\quad \sin\beta = \frac{r\,d\rho}{ds};\quad \frac{r}{\sin\rho_1} = \frac{r_1}{\sin\rho} = \frac{2a}{\sin(\rho+\rho_1)},$$

que, par la nature de l'attraction magnétique, ν^2 et ν_1^2 sont égaux, et qu'il en est de même de n^2 et de n_1^2, l'équation (1) peut s'écrire successivement sous les formes suivantes :

$$(1)\qquad F(r)\sin\beta = F(r_1)\sin\alpha;$$

$$(2)\qquad \frac{\sin\rho\,d\rho}{F\left(\dfrac{2a\sin\rho}{\sin(\rho+\rho_1)}\right)} + \frac{\sin\rho_1\,d\rho_1}{F\left(\dfrac{2a\sin\rho_1}{\sin(\rho+\rho_1)}\right)}.$$

Cette équation différentielle s'intègre dans le cas où les fonctions f et f_1 sont égales entre elles et à une puissance m de la distance; on obtient alors l'équation

$$(1')\qquad r^m\sin\beta = r_1^m\sin\alpha,$$

$$(2')\qquad \frac{d\rho}{\sin^{m+1}\rho} + \frac{d\rho_1}{\sin^{m+1}\rho_1} = 0,$$

dont l'intégrale sera

$$(3)\qquad \int\frac{d\rho}{\sin^{m+1}\rho} + \int\frac{d\rho}{\sin^{m+1}\rho_1} = \text{const.}$$

Dans le cas de la nature, les attractions et les répulsions magnétiques s'exercent en raison inverse du carré de la dis-

tance; on trouve, en représentant une constante par C,

$$\cos\rho - \cos\rho_1 = C.$$

223. *Rayon de courbure des courbes magnétiques.* — Puisque la recherche du rayon de courbure R ne dépend que des paramètres différentiels du système des coordonnées et des coefficients de l'équation différentielle de la courbe, si l'on applique à l'équation (2) les calculs indiqués au n° 218, on trouvera, après quelques réductions faciles, l'équation suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &[F(r)\cos\beta + F(r_1)\cos\alpha]\frac{1}{R}\\ &+\frac{1}{2}\left[F'(r) - \frac{F(r)}{r}\right]\sin 2\beta\\ &+\frac{1}{2}\left[F'(r_1) - \frac{F(r_1)}{r_1}\right]\sin 2\alpha = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas de la nature, $F(r)$, $F(r_1)$ deviennent $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r_1^2}$; l'équation précédente deviendra donc

$$\left(\frac{\cos\beta}{r^2} + \frac{\cos\alpha}{r_1^2}\right)\frac{1}{R} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sin 2\beta}{r^3} + \frac{\sin 2\alpha}{r_1^3}\right);$$

or, si l'on remarque que dans ce cas l'équation (1) devient

$$\frac{\sin\beta}{r^2} = \frac{\sin\alpha}{r_1^2},$$

on obtient l'expression suivante du rayon de courbure :

$$(5)\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}\,\frac{1}{R} = 3\left(\frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos\alpha}{r_1}\right),$$

qui est d'une interprétation et d'une construction faciles.

L'équation (4) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}\,\frac{1}{R} = \frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos\alpha}{r_1} - \frac{1}{2}\,\frac{F'(r)\sin 2\beta + F'(r_1)\sin 2\alpha}{\sin\alpha F(r) + \sin\beta F(r_1)}.$$

224. *Cas particuliers.* — Faisons quelques hypothèses sur les valeurs particulières de m dans l'équation :

1° Si $m = -1$, on trouve

$$\rho + \rho_1 = \text{const.},$$

équation du cercle;

2° Si $m = 0$, ce qui revient à dire que les forces magnétiques sont constantes, on trouve l'équation

$$\int \frac{d\rho}{2 \cos\frac{1}{2}\rho \sin\frac{1}{2}\rho} + \int \frac{d\rho_1}{2 \cos\frac{1}{2}\rho_1 \sin\frac{1}{2}\rho_1} = \text{const.},$$

ou bien

$$\tang \frac{1}{2}\rho \tang \frac{1}{2}\rho_1 = \text{const.};$$

3° Si $m = 1$, l'équation (2) devient

$$\int \frac{d\rho}{\sin^2\rho} + \int \frac{d\rho_1}{\sin^2\rho_1} = \text{const.},$$

ou bien, après intégration,

$$\cot\rho + \cot\rho_1 = \text{const.}$$

225. *Des courbes d'équilibre.* — On appelle ainsi les courbes telles qu'un corps, sous l'action de forces données, reste en équilibre sur cette courbe, quelle que soit la position qu'il occupe sur cette courbe. Nous avons déjà établi les propriétés générales des courbes d'équilibre d'un corps soumis à l'action de plusieurs forces centrales agissant en fonction de la distance; supposons que le nombre des forces est réduit à deux $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, on a l'équation

$$(1) \qquad \int f(\rho)\,d\rho + \int f_1(\rho_1)\,d\rho_1 = \text{const.};$$

or un grand nombre de questions se réduisent à la précédente, et cela arrive lorsque les forces qui agissent sur le point, sans être dirigées vers des centres fixes, sont telles qu'on peut les grouper deux à deux, par cette condition que les résultantes

de chacun de ces couples passent par un point fixe, et que leur intensité est une fonction de la distance du corps à ce point fixe.

Un cas curieux de cette réduction se présente lorsque l'on suppose que le point matériel est attiré suivant les deux tangentes menées de ce point à un ou plusieurs cercles. Examinons en particulier le cas de deux cercles de rayon m, m_1, et dont les centres sont en F et F_1. Soient t et t_1 les tangentes à ces deux cercles et $F(t)$, $F(t_1)$ les fonctions des tangentes qui représentent les lois des intensités. La résultante des deux forces $F(t)$, qui agissent sur le point matériel suivant les deux tangentes t au cercle m, est dirigée vers le centre F et a pour expression

$$2F(t)\cos(t, r) \quad \text{ou bien} \quad 2F(t)\frac{t}{r};$$

d'après cela, l'équation différentielle des courbes sera

$$(2) \qquad F(t)\frac{t}{r}\,dr + F(t)\frac{t_1}{r_1}\,dr_1 = 0,$$

avec les conditions

$$t^2 = r^2 - m^2, \quad t_1^2 = r_1^2 - m_1^2.$$

226. *Cas particuliers.* — 1° Supposons les forces proportionnelles aux tangentes, l'équation différentielle (2) devient

$$t^2\frac{dr}{r} + t_1^2\frac{dr_1}{r_1} = 0,$$

qui prend la forme

$$r\,dr + r_1\,dr_1 = m^2\frac{dr}{r} + m_1^2\frac{dr_1}{r_1};$$

l'intégrale, c étant la constante d'intégration, s'obtient sous la forme

$$r^2 + r_1^2 + c^2 = \log r^{2m^2} r_1^{2m_1^2}.$$

2° Si les forces sont en raison inverse des tangentes aux

cercles, on obtient l'équation

$$rr_1 = \text{const.},$$

qui représente l'ellipse de Cassini.

3° Si les forces sont en raison inverse des carrés des tangentes et que les deux cercles soient égaux, on obtient l'équation

$$\frac{t + t_1}{rr_1} = \text{const.}$$

4° Si elles sont en raison inverse des cubes des tangentes, on obtient, suivant que les deux cercles sont égaux ou inégaux, les deux équations

$$\frac{t^2 t_1^2}{rr_1} = \text{const.}, \quad \left(\frac{t^2}{r}\right)^{\frac{1}{m^2}} \left(\frac{t_1^2}{r_1}\right)^{\frac{1}{m_1^2}} = \text{const.}$$

227. *De quelques propriétés coniques.* — Comme application du système de coordonnées rectilignes et circulaires considéré dans le n° 207, si l'on suppose que le point fixe F_1 passe à l'infini, le système se composera d'une série de cercles concentriques ayant leur centre en F et d'une série de parallèles; l'équation

$$\left(\frac{r^2 - m^2}{p}\right) = u,$$

dans laquelle m est une constante, r et p sont la distance du point au centre F_1 et la distance à une droite fixe XX_1, et u une constante pouvant prendre toutes les valeurs possibles, représente une série de coniques doublement tangentes au cercle de rayon m et ayant la droite XX_1 pour corde des contacts. Les formules relatives à la tangente à la série de coniques conduiront à cette proposition, savoir : que si l'on considère un point A dans le plan de ces courbes et qu'on prenne les polaires de ce point par rapport aux différentes coniques et au cercle, elles auront toutes un point de concours sur la corde des contacts. Ce théorème donne le moyen de construire la tangente d'une de ces coniques en un point donné. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces calculs.

228. Problème. — *Soient* (ρ) et (ρ_1) *les deux séries de lignes coordonnées. Trouver l'angle des deux courbes*

$$u = \rho + \rho_1 = \text{const.},\quad v = \rho - \rho_1 = \text{const.}$$

Dans le cas actuel, on a

$$u' = 1,\quad u'_1 = 1;\quad v' = 1,\quad v'_1 = -1.$$

Donc, si l'on se porte au n° 220, on trouvera

$$K^2 = H^2 + H_1^2 - 2G^2,\quad K_1^2 = H^2 + H_1^2 + 2G^2;$$

par suite, on aura, d'après les formules (11) de ce numéro,

$$\cos\varphi_1 = \frac{-H^2 + H_1^2}{\sqrt{(H^2 + H_1^2)^2 - 4G^4}} = \frac{-H^2 + H_1^2}{\sqrt{H^4 + H_1^4 - 2H^2H_1^2\cos 2\varphi}}.$$

Sous cette forme on reconnaît que, si le système de coordonnées ρ et ρ_1 est tel que les carrés des deux paramètres différentiels du premier ordre soient égaux, l'angle φ_1 est droit et les deux courbes u et v se coupent orthogonalement, et qu'il en sera de même du nouveau système des coordonnées (u), (v).

Ce cas remarquable se présente dans le système bicirculaire; de là résulte que les deux courbes

$$\rho + \rho_1 = \text{const.},\quad \rho - \rho_1 = \text{const.},$$

qui représentent deux séries d'ellipses et d'hyperboles homofocales, se coupent orthogonalement.

On voit, de plus, que cette condition d'orthogonalité est nécessaire, car l'angle φ_1 ne peut être droit que tout autant que le numérateur du second membre de l'équation précédente est nul, ce qui entraîne la condition de l'égalité des carrés des deux paramètres H et H_1.

Il est aussi aisé de voir que, si les deux paramètres, sans être égaux, sont dans le rapport constant m, les deux équations

$$\rho + m\rho_1 = \text{const.},\quad \rho - m\rho_1 = \text{const.}$$

se couperont orthogonalement, et que, si le rapport m est va-

riable, les deux équations

$$d\rho + m\,d\rho_1 = 0, \quad d\rho - m\,d\rho_1 = 0$$

jouiront de la même propriété. De là on tire cette proposition générale : Si dans un système quelconque de coordonnées (orthogonal ou non) les paramètres différentiels du premier ordre sont dans un rapport m, les deux séries de courbes données par l'équation

$$d\rho^2 - m^2 d\rho_1^2 = 0$$

se coupent orthogonalement.

229. *Des diverses formes de l'équation de la ligne droite.* — Nous avons trouvé (nº **218**) l'expression suivante de la courbe :

$$\frac{d\sigma\, d\sigma_1 \sin\varphi}{P} = d_1(d\sigma \cos\alpha) - d_0(d\sigma_1 \cos\beta).$$

Si l'on suppose le système orthogonal et choisi de telle sorte que les paramètres H et H_1 soient égaux, on aura

$$(1) \quad \frac{H^2}{P} = \cos\alpha \frac{dH}{d\rho_1} - \sin\alpha \frac{dH}{d\rho} - H\left(\sin\alpha \frac{d\alpha}{d\rho_1} + \cos\alpha \frac{d\alpha}{d\rho}\right);$$

multiplions membre à membre cette équation et la suivante :

$$\frac{d\rho}{\cos\alpha} = \frac{d\rho_1}{\sin\alpha},$$

on obtient l'équation

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{H^3}{P}(\sin\alpha\, d\rho + \cos\alpha\, d\rho_1) \\ &\quad = \cos^2\alpha \frac{dH^2}{d\rho_1} d\rho_1 - \sin^2\alpha \frac{dH^2}{d\rho} d\rho + 2H^2 \cos\alpha \sin\alpha\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose que H^2 soit la somme de deux fonctions ψ, ψ_1, chacune d'un des paramètres ρ et ρ_1 coordonnés de telle sorte

que $H^2 = \psi + \psi_1$, on aura l'équation

$$(2') \qquad \frac{\sin\alpha\, d\rho + \cos\alpha\, d\rho_1}{P} = \frac{d(\psi_1 \cos^2\alpha - \psi \sin^2\alpha)}{(\psi + \psi_1)^{\frac{3}{2}}};$$

telle est l'expression de la courbure dans le système de coordonnées que nous venons de définir.

Si la trajectoire est une droite, la courbure $\frac{1}{P}$ étant nulle, l'équation différentielle de cette droite sera

$$d(\psi_1 \cos^2\alpha - \psi \sin^2\alpha) = 0,$$

dont l'intégrale première sera

$$(3) \qquad \psi_1 \cos^2\alpha - \psi \sin^2\alpha = \text{const.};$$

telle est la forme de l'équation de la droite dans le système de coordonnées orthogonales, et dans lequel les carrés des paramètres différentiels du premier ordre sont chacun la somme de deux fonctions de l'une des deux variables.

Le même théorème a lieu lorsque les carrés de H et de H_1 sont de la forme $M^2(\psi + \psi_1)$, $M_1^2(\psi + \psi_1)$, M étant une fonction de ρ et M_1 une fonction de ρ_1.

En effet, posons

$$M\, d\rho = du, \quad M_1\, d\rho_1 = du_1;$$

on tire de ces deux équations ρ en fonction de u, et ρ_1 en fonction de u_1; conséquemment, si l'on appelle U et U_1 les résultats de la substitution de ρ et de ρ_1 dans ψ et ψ_1, on aura

$$d\sigma^2 = (U + U_1)\, du^2, \quad d\sigma_1^2 = (U + U_1)\, du_1^2;$$

donc l'équation différentielle de la ligne droite dans le système des coordonnées u, u_1 sera

$$U \sin^2\alpha - U_1 \cos^2\alpha = \text{const.},$$

et, en revenant aux variables ρ et ρ_1, on aura encore

$$\psi \sin^2\alpha - \psi_1 \cos^2\alpha = \text{const.}$$

230. *De l'équation de la tangente à une conique dans le système elliptique.* — Ces coordonnées (n° 201) satisfont aux deux conditions dont nous venons de parler; donc l'équation de la ligne droite dans ce système sera

$$\rho^2 \cos^2\beta + \rho_1^2 \sin^2\beta = \rho_0^2. \tag{4}$$

Cette forme d'équation est due à M. Liouville. Si l'on y fait $\beta = 0$, on trouve $\rho = \rho_0$; donc ρ_0 est la valeur du demi-grand axe de la conique à laquelle cette droite est tangente, tandis que ρ et ρ_1 sont les demi-grands axes des coniques qui déterminent le point de la droite où elle forme avec les coniques correspondantes les angles β et $\frac{\pi}{2} - \beta$. Si $\rho_0 > c$, ρ_0 représente une ellipse; si $\rho_0 = c$, elle représente la distance focale; si $\rho_0 < c$, elle représente une hyperbole.

Conséquences de cette équation. — Le nombre des propriétés des coniques qu'on peut déduire de cette équation est considérable; proposons un exemple pour faire connaître l'usage que l'on peut faire de cette équation. Soit

$$\rho^2 \cos^2\beta_1 + \rho_1^2 \sin^2\beta_1 = \rho_{(0)}^2 \tag{4'}$$

la tangente à la conique $\rho_{(0)}$ du système; si les angles β et β_1 sont tels que leur différence égale un angle droit et qu'on fasse la somme des deux équations (4), (4'), on aura

$$\rho^2 + \rho_1^2 = \rho_0^2 + \rho_{(0)}^2,$$

qui est l'équation d'un cercle.

Le lieu des sommets d'un angle droit dont les côtés sont tangents à deux coniques homofocales est un cercle.

Si la différence des angles β_1 et β est U, on aura

$$\operatorname{tang} U = \frac{\operatorname{tang}\beta_1 - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}^2\beta_1 \operatorname{tang}\beta_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{\rho^2 - \rho_{(0)}^2}{\rho_{(0)}^2 - \rho_1^2}} \pm \sqrt{\dfrac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}\,\dfrac{\rho^2 - \rho_{(0)}^2}{\rho_{(0)}^2 - \rho_1^2}}}$$

pour représenter l'équation du lieu du sommet d'un angle C

dont les côtés restent tangents à deux coniques homofocales.

Si les deux coniques ρ_0 et $\rho_{(0)}$ se confondent en une seule, on obtient l'équation

$$\tang U = \frac{2\sqrt{(\rho^2-\rho_0^2)(\rho_0^2-\rho_0^2)}}{(\rho_0^2-\rho_1^2)-(\rho^2-\rho_1^2)}.$$

231. *De l'équation de la tangente à une conique dans le système bicirculaire.* — Si les centres des cercles (n° 206) de l'une et l'autre série sont les foyers de la double série de coniques, en appelant θ l'angle des deux rayons vecteurs r, r_1,

$$(5) \qquad r+r_1=2\rho, \quad r-r_1=2\rho_1;$$

d'après cela, l'équation (4) devient

$$(6) \qquad r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta=4\rho_0^2.$$

Cette équation établit, entre les distances r, r_1 d'un point aux deux foyers communs, l'angle des tangentes menées de ce point à la conique dont l'axe est $2\rho_0$, et l'axe de cette conique la même relation qui existe entre un angle et les trois côtés d'un triangle.

Or, si l'on représente par ρ_0 la demi-distance focale d'une conique dont le grand axe serait quelconque et dont les rayons vecteurs seraient τ et τ', on aura l'équation

$$(7) \qquad \tau^2+\tau'^2-2\tau\tau'\cos(\tau,\tau')=4\rho_0^2.$$

Donc, si l'on choisit τ et τ' respectivement égaux à r et r', l'angle (τ,τ') sera égal à l'angle θ. De là on tire les théorèmes suivants :

1° *Si deux coniques* C *et* C′ *sont telles que la distance focale de la première soit égale au grand axe de la seconde, et que deux points pris l'un sur la première et l'autre dans le plan de la seconde, de telle sorte que les distances τ et τ' du premier point aux foyers de la conique* C *soient respectivement égaux aux distances r et r_1 du second aux foyers de la conique* C′*; si du second point on mène des tangentes à cette*

conique, elles formeront entre elles le même angle que les deux rayons τ, τ'.

2° *Lorsque deux éléments du triangle formé par les deux rayons vecteurs et la distance focale de la première conique sont respectivement égaux à deux des éléments correspondants du triangle formé par les rabattements des distances d'un point aux deux foyers de la seconde sur les tangentes menées de ce point à cette conique et la ligne qui joint les extrémités de ces distances rabattues, les deux triangles seront égaux chacun à chacun, pourvu que parmi ces éléments il y ait un côté.*

3° *Si deux courbes planes* E, E′ *sont rapportées chacune à deux foyers dont les distances focales ne sont pas les mêmes, et qu'elles jouissent l'une et l'autre de la même propriété par rapport à leurs rayons vecteurs et aux mêmes paramètres* a, $a_1, \ldots$, *toute relation exprimant une propriété de la première courbe par rapport à ses rayons vecteurs, à l'angle de ses rayons et à la distance focale, exprimera la même propriété de la seconde courbe par rapport aux rayons vecteurs de cette courbe à l'angle des deux tangentes menées de ce point à une conique ayant les mêmes foyers que cette seconde courbe, pourvu que cette seconde conique ait un grand axe égal à la distance focale de la première courbe.*

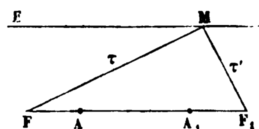
4° *Les mêmes choses étant données que dans le théorème* 3°, *si* $f(\tau, \tau'; a, a_1, \ldots) = 0$ *et* $f(r, r_1; a, a_1, \ldots) = 0$ *sont les équations des deux courbes* E *et* E′, *il suffira qu'en deux points correspondants une seule des coordonnées de l'une de ces courbes soit égale à la coordonnée correspondante de l'autre pour que les deux triangles, qui ont leurs sommets en ces points et qui sont formés le premier avec les deux rayons vecteurs* τ *et* τ' *et le côté* $2\rho_0$, *et le second avec l'angle des tangentes à la conique* $2\rho_0$ *et les rayons vecteurs* r, r_1, *soient égaux.*

Remarque. — Ces divers théorèmes s'appliquent à un réseau quelconque de coordonnées elliptiques homofocales, parce que la distance focale du réseau est indéterminée.

232. *Applications.* — Appliquons ces théorèmes à quelques exemples :

1° Soit la droite EM rapportée aux deux foyers F, F_1 et parallèle à la droite FF_1; elle exprime que le triangle formé par les deux rayons vecteurs τ et τ' a une aire constante $2a^2$. Si l'on

Fig. 80.



construit une conique ayant FF_1 pour grand axe et une distance focale AA_1 quelconque, la courbe E' qui aura, par rapport à ses rayons vecteurs r et r_1 et au paramètre a la même équation que la première par rapport à τ, τ' et a, jouira de cette propriété que l'aire triangulaire des deux rayons r, r_1, rabattus sur les tangentes menées d'un de ses points à la conique sera constante. On aura donc, pour l'équation de la seconde courbe,

$$\frac{1}{16}(r^2 - r_1^2)^2 - \frac{1}{2}\rho_0^2(r^2 + r_1^2) + (a^4 + \rho_0^4) = 0.$$

Si on la rapporte à deux axes rectangulaires menés du milieu de FF_1, l'un suivant cette droite et l'autre normalement, on aura l'équation

$$\rho_0^2 y^2 + (\rho_0^2 - c^2)x^2 + \rho_0^2(c^2 - \rho_0^2) - a^4 = 0,$$

qui représente une conique. Cette équation ne diffère de celle de la conique de la question qui a pour axe $2\rho_0$ et pour distance focale $2c$ que par le terme constant a^4. Ces deux coniques sont donc semblables.

2° Le lieu des sommets d'un angle droit circonscrit aux deux points F et F_1 est un cercle dont l'équation est

$$\tau^2 + \tau_1^2 = 4\rho_0^2;$$

le lieu des sommets d'un angle droit circonscrit à la conique

dont FF_1 est le grand axe sera un cercle dont l'équation sera, par rapport aux foyers A et A_1,

$$r^2 + r_1^2 = 4\rho_0^2.$$

De même le lieu des sommets d'un angle constant θ, circonscrit à deux points fixes, est un double cercle dont l'équation est

$$\tau^2 + \tau'^2 - 2\tau\tau' \cos\theta = 4\rho_0^2.$$

Donc le lieu des sommets de l'angle constant θ, circonscrit à la conique dont la distance focale est $2\rho_0$, sera une courbe dont l'équation sera, par rapport aux foyers A et A_1,

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\theta = 4\rho_0^2;$$

mais ici la courbe ne représente pas un double cercle, mais bien une courbe du quatrième degré, par suite de l'introduction de la demi-distance AA_1 dans l'équation cartésienne de la courbe.

3° Le lieu des points dont les distances à deux points fixes F et F_1 sont dans un rapport constant est un cercle; les bissectrices de l'angle intérieur et de l'angle extérieur des deux rayons vecteurs passent par deux points fixes.

Le lieu des points dont les distances aux deux foyers de la conique qui a FF_1 pour grand axe sont dans le même nombre constant est aussi un cercle; les bissectrices de l'angle intérieur et de l'angle extérieur des tangentes menées de chacun des points de ce cercle à la conique passent aussi par deux points fixes.

233. ***Des lignes dont chaque point jouit d'une propriété donnée par rapport aux courbures des lignes coordonnées.***

Problème. — *Trouver le lieu des points tels que chacun d'eux soit à une distance invariable de la droite qui joint les centres de courbure des deux coniques homofocales passant par ce point.*

Soient R et R_1 le rayon de courbure des deux coniques; ces

deux rayons sont les deux côtés d'un triangle rectangle dont la hauteur l est liée avec ces deux côtés par la relation

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2};$$

or, si l'on fait usage des formules (8^{iv}) du n° 190 et ($4'$) du n° 209, elles donnent, dans le système de coordonnées elliptiques que nous avons défini n° 209,

$$R = \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \quad R_1 = \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2}};$$

on aura donc

$$\frac{1}{l^2} = \frac{\rho^2 + \rho_1^2 - c^2}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2};$$

telle est l'équation du lieu cherché.

Elle peut aussi se mettre sous une autre forme; en effet, dans le système bicirculaire, dont les rayons sont t et t_1, elle devient

$$\frac{1}{l^2} = \frac{t^2 + t_1^2 - 2c^2}{2t_1^2 t^2}:$$

or, si l'on appelle ι la distance du point au centre des coniques homofocales, on a

$$l\iota = tt_1;$$

ainsi, pour cette courbe, la distance d'un point quelconque au centre commun des coniques est proportionnelle au rectangle des rayons vecteurs.

Tangentes à la courbe. — On trouve facilement

$$\frac{\cos\widehat{\iota\,ds}}{\iota} = \frac{\cos\widehat{t\,ds}}{t} + \frac{\cos\widehat{t_1\,ds}}{t_1};$$

la normale passe donc par le centre de gravité des extrémités des longueurs menées du point que l'on considère sur la courbe, inversement proportionnelle à $-\iota$, t, t_1 et dans la direction de ces rayons.

Rayon de courbure. — Soit $\mathfrak{R}$ ce rayon de courbure; on trouve sans difficulté l'équation suivante :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{\cos\widehat{\mathfrak{r}\mathfrak{R}}}{\mathfrak{r}} - \frac{\cos\widehat{t\mathfrak{R}}}{t} - \frac{\cos\widehat{t_1\mathfrak{R}}}{t_1}\right) = \frac{\cos 2\widehat{r\,ds}}{\mathfrak{r}^2} - \frac{\cos 2\widehat{t\,ds}}{t^2} - \frac{\cos 2\widehat{t_1\,ds}}{t_1^2},$$

qui donne une construction simple du rayon de courbure.

234. *Conclusion.* — Les exemples qui précèdent établissent surabondamment l'utilité de notre théorie des coordonnées curvilignes planes, et la facilité avec laquelle les questions sont résolues dans le système de coordonnées propre à chacune d'elles. Cette théorie renferme, comme cas particuliers, les divers systèmes de coordonnées que nous avons étudiés de préférence dans les deux premiers Livres de cet Ouvrage, et dont nous avons fait de nombreuses applications. Pour faire rentrer ces divers systèmes dans l'ordonnance de nos formules générales, il suffirait, dans ces divers cas, de mettre en évidence les paramètres différentiels du premier ordre H, H_1, G, relatifs aux arcs et à l'angle des lignes coordonnées.

Que si l'on compare les formules de notre *Analyse des courbes planes* avec les formules de notre *Analyse des courbes tracées sur une surface*, on reconnaît entre elles de nombreux points de contact. En effet les secondes se partagent en trois groupes : le premier, qui peut être affecté de la courbure des lignes coordonnées, mais nullement de la courbure de la surface; le second, affecté des courbures tangentielles des lignes coordonnées et de la courbure de la surface; enfin, le troisième, relatif aux courbures des arcs coordonnés normales à la surface. Or le premier groupe de formules a son analogue dans l'Analyse des courbes planes : de là résulte que toutes les questions qui dépendent des formules de ce groupe sont traitées, ou peuvent être traitées de la même manière dans les deux Analyses. Le second groupe a aussi son analogue dans l'Analyse des courbes planes; mais les formules sont simpli-

fiées par suite de la disparition du terme relatif à la courbure de la surface. Conséquemment les questions de Géométrie plane qui dépendent des formules de ce groupe peuvent être traitées par un calcul analogue, mais plus simple. Le troisième groupe n'a pas d'analogue dans l'Analyse des courbes planes.

Ces observations permettraient d'ajouter à notre théorie des coordonnées planes toutes les formules des deux premiers groupes que nous avons établies dans l'*Analyse des courbes tracées sur une surface*, et toutes les applications que nous en avons faites dans le Livre II de l'Ouvrage cité; mais, pour éviter des répétitions, nous omettons ces formules et ces applications. Seulement il est de notre devoir de les mentionner, parce qu'elles forment le complément du présent Ouvrage.

FIN.

236 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



